EXCERPTA QUÆDAM

E

NEWTONI

Principiis Philosophiæ Naturalis,

CUM NOTIS VARIORUM.

CANTABRIGIÆ:

TYPIS ACADEMICIS EXCUDEBAT J. BENTHAM.

Veneunt apud *T.* & *J. Merrill*, et *J. Nicholson*, *Cantabrigiæ*; *J. Fletcher* et *D. Prince*, *Oxoniæ*; *B. Dod*, *J. Whiston* & *B. White*, et *J. Nourse*, *Londini*; *Tesseman*, *Ebor*; *Kincaid* & *Bell*, *Edinburgiæ*; *R.* & *A. Foulis*, *Glasguiæ*; et *Gul. Smith*, *Dublinii*.

M.DCC.LXV.

A

LIST of the SUBSCRIBERS.

A

James Adair, Efquire, Soho Square, London
James Adair jun. Efquire
William Adair, Efquire
William Alder, Efquire, Berwick upon Tweed
John Alderfon, Efquire, Cambridge
Charles Allix, Efquire, Swaffham, Cambridgefhire
Mr. Allott, Trinity College, Cambridge
Mr. Arden jun. Trinity College, Cambridge
Mr. Arnald, St. John's College, Cambridge

B

Reverend Mr. Backhoufe, M. A. Fellow of Chrift College, Cambridge
Mr. Tho. Baldwin, B. A. St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Barclay, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend Mr. Barker, M. A. Fellow of Queen's College, Cambridge, 2 Copies
Mr. Barnes, St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Barton, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Bates, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Bates, B. A. Fellow of King's College, Cambridge
Reverend Mr. Beadon, M. A. Fellow of St. John's College, Cambridge, and Chancellor of St. David's, 2 Copies
Mr. Beecher, B. A. St. John's College, Cambridge
Mr. Bell, B. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Bell, M. A. Fellow of Pembroke-Hall, Cambridge
Mr. Bennet, Emmanuel College, Cambridge
Mr. Bennet, Trinity College, Cambridge
Mr. Bentham, Cambridge
Library of Berwick upon Tweed
Mr. Beverly, Chrift College Cambridge
James Bindley, Efquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Blackall, Fellow of Emmanuel College
John Erafmus Blacket, Efquire, Newcaftle upon Tyne
Francis Blake, Efquire, F. R. S.
Mr. Bond, Caius College, Cambridge
Samuel Borlafe, Efquire
Reverend William Borlafe, B. A. St. Peter's College
Mr. George Borlafe, B. A. St. Peter's College

Reverend

Reverend Mr. Bowden, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Mr. Brand, Caius College, Cambridge
Salifbury Brereton, Efquire, F. R. S.
Mr. Brown, Gentleman Commoner of Hertford College, Oxford
Afhton Warner Byam, Efquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Byrche, M. A. late Fellow of Sidney College, 2 Copies
Mr. Byron, St. John's College, Cambridge

C Bishop of Lichfield 1804

The Honourable Mr. Cornwallis, B. A. Fellow of Merton College, Oxford
Count Carburi
Sir Gervas Clifton, Baronet, Chrift College, Cambridge
Mr. Callamy, Fellow-Commoner of Emmanuel College, Cambridge
Reverend Mr. Carlos, M. A. Fellow of Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Carr, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
Mr. Carter, Trinity College, Cambridge
Mr. Caftle, M. A. Caius College
Henry Bolton Cay, Efquire, Fellow of Clare-Hall
Thomas Chamberlayne, Efquire, Fellow-Commoner of Clare-Hall, Cambridge
Mr. Chambers, M. A. Fellow of Univerfity College, and Vinerian Law Fellow in the Univerfity of Oxford
Reverend Samuel Chandler, D.D. F. R.S.
Mr. Chapman, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend Mr. Churchill, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge
Mr. Clowes, Clare-Hall
Mr. Clubbe, Caius College, Cambridge
Mr. Cole, Trinity College, Cambridge
Doctor Collignon, Profeffor of Anatomy in the Univerfity of Cambridge
Reverend Mr. Colman, M. A. Fellow of Corpus Chrifti College, Cambridge
Mr. Ifaac Cope, Leek, Staffordfhire
Reverend Mr. Corey, M. A. Fellow of Caius College
Library of Corpus Chrifti College, Oxford
Reverend Mr. Cowper, M. A. Fellow of Corpus Chrifti College, Cambridge
Mr. Thomas Crafter, St John's College, Cambridge
Mr. Crofley, St. John's College, Cambridge
Lewis Crufius, D. D. F. R. S. upper Mafter of the Charterhoufe School

D

Reverend Mr. Daker, B. A. Fellow of Magdalen College, Cambridge
Robert Dale, LL. D. Fellow of Trinity-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Darby, M. A. Fellow of Jefus College, Cambridge
Mr. John Davenport, Leek, Staffordfhire
Reverend Mr. Davies, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend Mr. Davifon, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Dawfon, B. A. Jefus College, Cambridge
Mr. Dean, St. John's College, Cambridge
Mr. Difney, St. Peter's College, Cambridge

Richard

Richard Hancorn Duppa, Eſquire
Mr. Dutens, Queens College, Cambridge

E

Mr. Earl, M. A. Merton College, Oxford
Mr. Eaton, B. A. St. Peter's College, Cambridge
Charles Egleton, Eſquire, Fellow-Commoner of Queen's College, Cambridge
Reverend Mr. Elliſon, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend William Elliſton, D. D. Maſter of Sidney College, Cambridge
Reverend Mr. Evans, M. A. Fellow of Clare-Hall, Cambridge

F

The Honourable Mr. Fitzwilliams, M. A. Trinity-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Farmer, M. A. Fellow of Emmanuel College, Cambridge
William Fauquier, Eſquire, F. R. S.
Mr. Foote, Gentleman-Commoner of Hertford College, Oxford
Mr. John Ford
Reverend Mr. Forſter, M. A. Fellow of Jeſus College, Cambridge
Reverend Thomas Frampton, B. D. Fellow of St. John's College, Cambridge
Mr. Frank, Trinity College, Cambridge

G

The Right Honourable Lord Grey
The Honourable John Grey, M. A. Queen's College, Cambridge
——— Gardner, Eſquire, Fellow-Commoner of St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Gardner, M. A. Fellow of Catherine-Hall, Cambridge
Mr. Glover, St. John's College, Cambridge
Reverend Peter Stephen Goddard, D. D. Maſter of Clare-Hall, Cambridge
Mr. Goodenough, M. A. Merton College, Oxford
John Old Goodford, Eſq; Fellow-Commoner of Queen's College, Cambridge
Reverend John Gordon, D. D. St. Peter's College, Cambridge
William Gordon, Eſquire, Fellow of Queen's College, Cambridge
Samuel William Gordon, Eſquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Graham, Trinity College, Cambridge
Mr. Gregory, Magdalen College, Cambridge

H

John Hadley, M. D. F. R. S. late Fellow of Queen's College, and Profeſſor of Chemiſtry in the Univerſity of Cambridge
Reverend Mr. Hall, B. A. Fellow of St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Hallifax, M. A. Fellow of Lincoln College, Oxford; and Profeſſor of Divinity at Greſham College
George Hardinge, Eſquire, Middle Temple
Reverend John Harris, Vicar of Sturmiſter-Marſhal, Dorſetſhire
John Harriſon, Eſquire, Fellow-Commoner of St. John's College, Cambridge

Mr.

William Heberden, M. D. F.R.S. 6 Copies
Reverend Mr. Henſon, M.A. Fellow of Sidney College, Cambridge
Mr. Heſlop, B. A. Corpus Chriſti College, Cambridge
Mr. Hettley, St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Hey, M. A. Fellow of Sidney College, Cambridge
Noel Hill, Eſquire, Fellow-Commoner of St. John's College, Cambridge
Doctor Hinckley
Jacob Hinde, Eſquire, Langham-Hall, Eſſex
Mr. Hobhouſe, M.A. Brazen Noſe College, Oxford
Reverend Mr. Holcombe, M. A. late Fellow of Chriſt College, Cambridge
Reverend Mr. Hornſby, M.A. Savillian Profeſſor of Aſtronomy in the Univerſity of Oxford
Mr. Hudſon, Queen's College, Cambridge
Julius Hutchinſon, Eſquire, Fellow-Commoner of Sidney College, Cambridge
John Hyde jun. Eſquire, of the Temple

I

Doctor Jebb, Stratford
Mr. Johnſon, Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Jones, Cambridge
Mr. Jones, B. A. Trinity College, Cambridge
Mr. Jones, St. Peter's College, Cambridge
Mr. Ironſide, B. A. Fellow of St. John's College, Cambridge
Mr. Ives, B. A. Caius College, Cambridge

K

Reverend Mr. Keate, B. A. Fellow of King's College, Cambridge
Reverend Mr. King, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge

L

Mr. Lambert, B. A. Trinity College, Cambridge *now senior Fellow 1804 —*
Mr. Law, Chriſt College, Cambridge
Reverend John Lawſon, B. D. Rector of Swanſcombe
Reverend Mr. Lee, M. A. Fellow of King's College, Cambridge
Mr. Seymour Leeke, St. Peter's College, Cambridge
Mr. Charles Le Grice, St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Leiceſter, Prebendary of Peterborough
Charlton Leighton, Eſquire, Fellow-Commoner of St. John's College Cambridge
Reverend Mr. Lloyd, M. A. Fellow of Queen's College, Cambridge
Mr. John Lloyd, Queen's College, Cambridge
William Lobb, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Reverend Roger Long, D. D. Maſter of Pembroke-Hall, and Profeſſor of Aſtronomy in the Univerſity of Cambridge
Reverend Mr. Longmire, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Lovell, M.A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend Mr. Ludlam, M.A. Fellow of St. John's College, Cambridge

Mr.

M

Mr. Mace, Clare-Hall, Cambridge
Horatio Mann, Eſquire, St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Marſh, Rector of Ford, Northumberland
Reverend Mr. Marſh, M.A. Fellow of Queen's College, Cambridge
Mr. Marſh, St. John's College, Cambridge
Reverend Mr. Martyn, M. A. Fellow of Sidney College, and Profeſſor of Botany in the Univerſity of Cambridge
Francis Maſeres, Eſquire, of the Temple
Lieutenant Colonel Edward Maxwell
Robert Maxwell, Eſquire
Reverend Mr. Michell, B. D. F. R. S. late Fellow of Queen's College, and Woodwardian Profeſſor of Foſſils in the Univerſity of Cambridge
Reverend Mr. Moiſes, M. A. Lecturer of All Saints, Newcaſtle
Mr. Moore, B. A. Trinity College, Cambridge
Reverend Patrick Murdock, D. D. F. R. S.
Reverend Mr. Murhall, M. A. Fellow of Chriſt College, and Senior Proctor in the Univerſity of Cambridge

N

Mr. Naſmith, Corpus Chriſti College, Cambridge
Reverend John Newcombe, D.D. late Maſter of St. John's College, Cambridge, and Dean of Rocheſter
Reverend Mr. Newcombe, M. A. Fellow of Hertford College, Oxford
Reverend John Nicols, D. D. Preacher to the Charterhouſe, and Prebendary of Ely

O

The Right Honourable Arthur Onſlow, Eſquire
George Onſlow, Eſquire, Member of Parliament for the County of Surry
George Onſlow, Eſquire, Member of Parliament for Guilford, Surry
Reverend Mr. Oldham, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Oliver, M. A. Fellow of Sidney College, Cambridge

P

Mr. Pawſon, St. Peter's College, Cambridge
Mr. Peake, St. John's College, Cambridge
Mr. Pearce, St. John's College, Cambridge Master Jesus Coll:
Peter Peirſon, Eſquire, of the Inner Temple
Andrew Pemberton, Eſquire, Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Iſaac Pennington, St. John's College, Cambridge
Mr. Penton, Trinity College, Cambridge
Mr. Perrin, Gentleman-Commoner of Chriſt Church, Oxford
John Lewis Petit, M. D. F. R. S.
Mr. Pierſon, B. A. Jeſus College, Cambridge

Mr.

Mr. Popham, Trinity College, Cambridge
Reverend Mr. Porteus, M. A. late Fellow of Chriſt College, Cambridge
William Poſt, Eſquire, Fellow of Queen's College, Cambridge
Mr. Preſton, B. A. Queen's College, Cambridge
Samuel Provooſt, Eſquire, Fellow-Commoner of St. Peter's College, Cambridge
Reverend Mr. Purkis, Fellow of Magdalen College, Cambridge

R

Mr. Rawlinſon, Queen's College, Cambridge
Mr. Rayner, B. A. Caius College, Cambridge
Edward Reeve, Eſquire, Lincoln's Inn
Mr. Richmond, B. A. Trinity College, Cambridge
Reverend William Ridlington, LL. D. Fellow of Trinity-Hall, and Profeſſor of Law in the Univerſity of Cambridge
Mr. Rooke, Trinity College, Cambridge Judge —
Mr. Rudd, St. John's College, Cambridge
Mr. Thomas Ruggles, Fellow-Commoner of Sidney College Cambridge
Reverend Mr. Ruſſel, M. A. Fellow of Corpus Chriſti College, Oxford

S

The Right Honourable the Counteſs of Stamford
Reverend Samuel Salter, D. D. Maſter of the Charterhouſe
Mr. Scaife, Trinity College, Cambridge
Reverend Mr. Shepherd, B. D. Fellow of Chriſt College, Plumian Profeſſor of Aſtronomy and Experimental Philoſophy in the Univerſity of Cambridge, and F. R. S.
John Simpſon, Eſquire, Newcaſtle upon Tyne Father to Lady Liddell
Reverend John Smith, D. D. Maſter of Caius College, Cambridge
John Smith, Eſquire, Fellow-Commoner of Magdalen College, Cambridge
Mr. Smyth, B. A. Clare-Hall, Cambridge
Mr. Spry, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend William Steggall, M. A. Rector of Wyverſton, Suffolk
Reverend Mr. Stevens, M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge
Reverend Mr. Stoddart, B. A. Chriſt College, Cambridge
Mr. Swale, B. A. St. John's College, Cambridge

T

The Honourable Thomas Townſhend, Member of Parliament for the Univerſity of Cambridge
Mr. Taylor, Queen's College, Cambridge
Reverend Mr. Tew, M. A. Fellow of King's College, Cambridge
Reverend Thomas Thorp, M. A. Vicar of Berwick upon Tweed now Archdeacon of Northumberland
Mr. Robert Thorp, Newcaſtle upon Tyne
Mr. Tildyard, Fellow-Commoner of Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Trevigar
Mr. Travis B. A. St. John's College, Cambridge

Reverend

Reverend Mr. Tucker, M. A. Canterbury *the famous Dean of Glocester –*
Reverend Mr. Turner, M. A. Fellow of Merton College, Oxford
Reverend Mr. Turner, M. A. Fellow of Emmanuel College, Cambridge
Mr. Turner, Pembroke-Hall, Cambridge
Mr. Tyſon, B. A. Corpus Chriſti College, Cambridge

W

Mr. Waddington, Clare-Hall, Cambridge
Mr. Ward, B. A. St. John's College, Cambridge
Mr. Ward, Chriſt College, Cambridge
Edward Waring, M. A. Fellow of Magdalen College, Lucaſian Profeſſor of Mathematics in the Univerſity of Cambridge, and F. R. S.
Reverend Mr. Watſon, M. A. Fellow of Trinity College, and Profeſſor of Chemiſtry in the Univerſity of Cambridge *now Bishop of Landaff. 1804 –*
Mr. Watſon, Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Weſton, M. A. Fellow of Magdalen College, Oxford
Reverend Mr. Wheeler, M. A. Fellow of Magdalen College, Oxford
Mr. John White, B. A. Caius College, Cambridge
Reverend Mr. Henry Whitfield, Fellow of Pembroke-Hall, Cambridge
John Wilſon, M. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge
Mr. Wilſon, Chriſt College, Cambridge
Mr. Wilſon, Pembroke-Hall, Cambridge
Mr. Wiſe, St. John's College, Cambridge
Francis Wollaſton, Eſquire, F. R. S. 4 Copies
Reverend Francis Wollaſton, LL. B. Rector of Eaſt Dereham, Norfolk
George Woodd, Eſquire, Richmond in Surry
Mr. Woodhouſe, Emmanuel College, Cambridge
Ralph Wormley, Eſquire, Fellow-Commoner of Trinity-Hall, Cambridge
Reverend Mr. Wynter, B. A. Fellow of Sidney College, Cambridge
Reverend Mr. Wyvill, LL. B. Queen's College, Cambridge

Y

The Honourable John Yorke, Eſquire
The Honourable and Reverend James York, Dean of Lincoln

Z

Reverend Mr. Zouch, M. A. Fellow of Trinity College, Cambridge.
Prebendary of Durham 1806 –

CORRIGENDA.

PAG. 11. l. 27. pro *augeantur numero et magnitudine, diminuantur* &c. lege *augeantur numero, et magnitudine diminuantur.* Pag. 21. l. ult. pro *Bd*, lege *BD*. Pag. 24. l. 20. pro *Dc*, lege *DC:* l. 21. pro *puncti* a, lege *puncti* Q: l. 23. pro *Dc*, lege *dc:* l. 25. pro *Dc*, lege *dc:* l. 26. pro *DcbA*, lege *DCbA*. Pag. 25. l. 26. pro *Bk*, lege *BK*. Pag. 26. l. 33. pro *AIG*, lege *AI*. Pag. 34. l. 26. pro *Bv*, lege *Bu*. Pag. 80. l. 19. deeſt *. Pag. 88. l. 21. pro *ob*, lege *ab*. Pag. 89. l. 26. pro *hypotheſes*, lege *hypotheſin*. Pag. 90. l. 30. pro *gravitationum*, lege *gravitationis*. Pag. 102. l. 4. pro *planetos*, lege *planetas*. Pag. 121. l. 33. pro *Prop. IV*, lege *Prop. VI*. Pag. 150. l. 36. pro *ſyzygias*, lege *ſyzygiis*. Pag. 153. l. 29. pro *octantantibus*, lege *octantibus*. Pag. 161. l. 17. et 18. pro *ſignentibus*, lege *ſequentibus*. Pag. 165. l. 34. pro *ineund*, lege *ineundo*.

NEWTONI

PRINCIPIA

PHILOSOPHIÆ NATURALIS.

DEFINITIONES.

1. *Quantitas materiæ eſt menſura ejuſdem orta ex illius denſitate et magnitudine conjunctim.*
2. *Quantitas motus eſt menſura ejuſdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.*
3. *Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, quâ corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.*
4. *Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.*
5. *Vis centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod, tanquam ad centrum, undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.*

6. *Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.*
7. *Vis centripetæ quantitas acceleratrix eſt ipſius menſura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.*
8. *Vis centripetæ quantitas motrix eſt ipſius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.*

Haſce virium quantitates brevitatis gratiâ nominare licet vires motrices, acceleratrices, et abſolutas; et diſtinctionis gratiâ referre ad Corpora centrum petentia, ad corporum Loca, et ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compoſitum; et vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam de centro per loca ſingula in circuitu diffuſam, ad movenda corpora quæ in ipſis ſunt; vim autem abſolutam ad Centrum tanquam cauſâ aliquâ præditum, ſine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas et ſedes Phyſicas jam non expendo.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

Axiomata, Sive Leges Motus.

I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud a viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, et fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

III.

Actioni contrariam ſemper et equalem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales et in partes contrarias dirigi.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.

Si corpus dato tempore, vi ſola *M* in loco *A* impreſſa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; et vi ſola *N* in eodem loco impreſſa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, et vi utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab Tab. I. Fig. I.

AXIOMATA, SIVE *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis per legem II. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, ſive vis *N* imprimatur, ſive non; atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, et idcirco in utriuſque lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per legem I.

COROLLARIUM II.

Tab. 1. Fig. 1. *Et hinc patet compoſitio vis directæ* AD *ex viribus quibuſvis obliquis* AB *et* BD, *et viciſſim reſolutio vis cujuſvis directæ* AD *in obliquas quaſcunque* AB *et* BD. *Quæ quidem compoſitio et reſolutio abunde confirmatur ex mechanica.*

Tab. 1. Fig. 2. Ut ſi de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON* filis *MA*, *NP* ſuſtineant pondera *A* et *P*, et quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *KOL* filis perpendiculariter occurrens in *K* et *L*, centroque *O* et intervallorum *OK*, *OL* majore *OL*, deſcribatur circulus occurrens filo *MA* in *D*: et actæ rectæ *OD* parallella ſit *AC*, et perpendicularis *DC*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta *K*, *L*, *D* affixa ſint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* et *L* vel *D* et *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *AD*, et hæc reſolvetur in vires *AC*, *CD*, quarum *AC* trahendo radium *OD* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet, ac ſi perpendiculariter traheret radium *OL* ipſi *OD* æqualem; hoc eſt, idem atque pondus *P*, ſi modo pondus illud ſit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id eſt (ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* ſeu *OL*, Pondera igitur *A* et *P*, quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *OK* et *OL*, idem pollebunt,

et ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima libræ, vectis, et axis in peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quod ſi pondus *p* ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo *Np*, partim incumbat plano obliquo *p G*: agantur *p H*, *NH*, prior horizonti, poſterior plano *p G* perpendicularis; et ſi vis ponderis *p* deorſum tendens, exponatur per lineam *p H*, reſolvi poteſt hæc in vires *p N*, *HN*. Si filo *p N* perpendiculare eſſet planum aliquod *p Q*, ſecans planum alterum *p G* in linea ad horizontem parallela; et pondus *p* his planis *p Q*, *p G* ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus *p N*, *HN*, perpendiculariter nimirum planum *p Q* vi *p N*, et planum *p G*, vi *HN*. Ideoque ſi tollatur planum *p Q*, ut pondus tendat filum; quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eadem vi *p N*, qua planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis *P N*, ut *p N* ad *p H*. Ideoque ſi pondus *p* ſit ad pondus *A* in ratione, quæ componitur ex ratione reciproca minimarum diſtantiarum filorum ſuorum *p N*, *AM* a centro rotæ, et ratione directa *p H* ad *p N*; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideo ſe mutuo ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem *p*, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: et inde vires cunei et mallei innoteſcunt: utpote cum vis qua pondus *p* urget planum *p Q* ſit ad vim, qua idem vel gravitate ſua vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam *p H* in plana, ut *p N* ad *p H*; atque ad vim, qua urget planum alterum *p G*, ut *p N* ad *NH*. Sed et vis cochleæ per ſimilem virium diviſionem colligitur; quippe quæ cuneus eſt a vecte impulſus. Uſus igitur corollarii hujus latiſſime patet, et late patendo veritatem ejus evincit; cum pendeat ex jam dictis mechanica tota ab auctoribus diverſimode demonſtrata. Ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, vectibus, nervis tenſis et ponde-

de-

AXIOMATA, SIVE

deribus directe vel oblique ascendentibus, cæterisque potentiis mechanicis componi solent, ut et vires tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, et differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per legem III, ideoque per legem II. æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

[a] Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, et distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel

TAB. I. Fig. 3.

[a] 1. Si rectæ duæ positione datæ AC, BD ad data puncta A, B, terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, et recta CD, quâ puncta indeterminata C, D, junguntur, secetur in ratione datâ in K: dico quod punctum K locabitur in rectâ positione datâ.

Concurrant enim rectæ AC, BD in E, et in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitque FD semper æqualis datæ EG; et erit ex constructione

vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter et commune centrum horum duorum et tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum et centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo et commune centrum horum trium et quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium et centrum quarti in data ratione, et sic in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Leges Motus.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis

tione EC ad GD, hoc est, ad EF ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, et propterea dabitur specie triangulum EFC. Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD; et ob datam illam rationem dabitur etiam specie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL positione datâ. Junge LK, et similia erunt triangula CLK, CFD; et ob datam FD et datam rationem LK ad FD dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, et erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. Q.E.D.

Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF, EL, et EC, id est GD, HK, et EC datas habent rationes ad invicem.

Eâdem ratione demonstrari potest si motus punctorum C et D non fiant in eodem plano.

vis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; et reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales; ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum et quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe, vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; et propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium lex eadem, quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum ſine motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, et ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) et ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus et impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per legem II æquales erunt congreſſuum effectus in utroque

casu; et propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum. LEGES MOTUS.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, et à viribus acceleratricibus æqualibus secundùm lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) et secundùm lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt positiones et motus eorum inter se.

Sectio Prima.

SECTIO I.

De methodo Rationum primarum et ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

PROOEMIUM.

De methodo Exhauſtionum.—De methodo Indiviſibilium.—De methodo Rationum primarum et ultimarum.—De accomodatione methodi Rationum primarum et ultimarum ad inventionem virium centripetarum.

Datæ propoſitionis veritatem ſæpiſſimè per methodos diverſas ſtabilire conceditur. Eminet vero inter alias illa demonſtrationis forma, quam directam nominare licet: in quâ nimirum, ope axiomatum quorundam ſimpliciſſimorum, vel theorematum quæ antea demonſtrata ſunt, ad propoſitionis ipſius cognitionem, nullâ circuitione factâ, perducimur.

Quoniam vero hominum ſolertia nequit in omni caſu ideas illas intermedias quibus extremæ connectuntur inveſtigare, ſæpiſſimè invenimus geometras permultos præſtantiſſimam hanc veritatem eliciendi rationem invitos ſane declinare, atque ratiocinia ex abſurdo in ſcriptis ſuis paſſim uſurpare. Quandocunque enim aditus ad veritatem immediate perducens vel patebat nullus, vel difficilis ac confragoſus, hypotheſin omnem quam quis excogitare potuit diluendo, præter illam quam ſtabilire et confirmare voluerunt, ex falſis ſuppoſitionibus verum tandem eruebant. Hâc demonſtrationis formâ ſæpiſſimè ſtabilitur veritas propoſitionum ſimpliciſſimarum ad figuras rectilineas ſpectantium. Propoſitiones vero quæ ſpectant ad figuras curvilineas deteguntur, vel immediatâ comparatione legum quibus generantur, vel ope figurarum rectilinearum, inter quas et curvilineas intercedit data relatio: hæ vero relationes inveſtigari nequeunt immediatâ comparatione figurarum, quæ in modo generationis ſunt prorſus diſſimiles; et conſulitur perſpicuitati et evidentiæ geometricæ, ſi ex receptis et conceſſis figurarum rectilinearum proprietatibus ad curvilineas liceat immediatè tranſire. Neceſſariò igitur oritur hujuſce methodi frequentior uſus in inveſtigandis figurarum proprietatibus, ſi curvilinearum relationes ex iiſdem principiis cum eâdem ſimplicitate et evidentiâ determinare vellemus. Cum ſpatia rectilinea inter ſe conferenda ſunt, ut magnitudines eorum patefiant, methodus primaria ea eſt quâ utitur Euclides in Elem. i. 4. ubi triangulum triangulo ſuperponi intelligitur, quamque applicat in omni aliâ comparatione ſpatiorum rectilineorum inter ſe. Cum autem ſpatia curvilinea cum rectilineis vel inter ſe conferenda ſunt, propter geneſeos legem diverſam, eadem methodus applicari nequit. Hinc alio ratiocinati ſunt modo veteres geometræ, methodumque exhauſtionum invenerunt. Secundum hanc inſcribere et circumſcribere ſolebant ſpatia rectilinea ſpatio curvilineo quidem inæqualia, eâ vero lege variata, ut, ſi aſſumatur data quævis quantitas, differentia eorum

rum ita minuetur, ut fiat hâc quantitate minor: et tandem, inveniendo absurditatem quandam sequi si spatia quæ comparabant majora vel minora aliud alio fingerentur, æqualia esse concludebant. SECTIO PRIMA.

Exempli gratiâ: Probaturus Archimedes aream circuli æqualem esse areæ trianguli, cujus basis est circuli peripheria, et altitudo semidiameter, polygonum *ABC* circulo circumscribit; probatque, aucto laterum polygoni numero, tale tandem descriptum fore polygonum, quod circulum minus quàm pro minimâ assignabili differentiâ exsuperabit: patet igitur, triangulum *DEF*, cujus basis *EF* est circuli peripheria, et cujus altitudo *DE* circuli radius, circulo non esse majus: si enim majus esset, polygonum circulo circumscribere liceret triangulo illo minus: cum vero polygoni peripheria major sit peripheriâ circuli, polygoni area aream trianguli necessariò exsuperabit; area enim polygoni æqualis est areæ trianguli cujus basis est polygoni peripheria, et altitudo circuli radius, ideoque triangulum *DEF* circulo majus esse nequit. — Rursus polygonum aliud in circulo eodem inscribendo, et comparando aream ejus cum trianguli prædicti areâ, eodem probat argumento trianguli aream circuli areâ minorem non esse; et ex præmissis concludit, triangulum *DEF*, cum neque majus neque minus sit circulo, ei æquale esse. TAB. I. FIG. 4.

Ut vero clarius innotescat quomodo veteres geometræ à notis proportionibus figurarum rectilinearum curvilineas inter se comparabant, aliud jam exemplum methodo exhaustionum demonstratum trademus. — Exprimant lineæ *AB*, *AD* areas duorum circulorum, et *AP*, *AQ* similia polygona in his circulis inscripta: bisectis perpetuò circulorum arcubus à lateribus polygonorum subtensis, areæ polygonorum propius ad areas circulorum accedent quàm pro datâ quâvis differentiâ; et eandem rationem, quam habent polygona inter se, habebunt etiam circuli. Nam, si negas, sit *AP* ad *AQ* ut *AB* ad *AE*, quæ minor est quàm *AD*: augeantur numero et magnitudine, diminuantur latera polygoni *AQ*, donec differentia inter aream ejus et aream circuli *AD* minor fuerit quàm *ED* (quod fieri potest per Elem. x. 1.) sit hæc differentia *qD*, et exprimetur polygonum in circulo *AD* per *Aq*; sitque *Ap* polygonum simile in circulo *AB*: quoniam est *AP* : *AQ* : : *AB* : *AE* [per hyp.] et polygonum *Ap* ad simile *Aq*, ut *AP* ad *AQ*; erit *AB*: *AE* : : *Ap*: *Aq*; quoniam igitur circulus *AB* major est quàm polygonum inscriptum *Ap*, erit *AE* major quàm *Aq*; per hypothesin autem *Aq* major est quàm *AE*; ergo, his duobus inter se repugnantibus, sequitur polygonum *AP* non esse ad polygonum *AQ* ut circulus *AB* ad quantitatem *AE* quæ minor est quàm circulus *AD*: ob eandem causam *AQ* non est ad *AP* ut *AD* ad *AF* minorem quàm *AB*. Exinde etiam sequitur, non esse *AP* ad *AQ* ut *AB* ad quantitatem *Ae* quæ major est quàm *AD*; nam si *AF* sit ad *AB* ut *AD* ad *Ae*, erit *AP* ad *AQ*, ut *AF*, quæ minor est quàm *AB*, ad *AD*, quod contradicit jam demonstratis: quoniam igitur *AP* non est ad *AQ* ut *AB* ad quantitatem minorem vel majorem quàm *AD*, sequitur, circulos *AB* et *AD* eandem inter se rationem habere quam habent similia polygona inscripta *AP* et *AQ*. TAB. I. FIG. 5.

Sectio Prima. Ex hâc argumentandi ratione patet universaliter veritas propositionis, cujus ope omnia hujusce generis theoremata demonstrari possunt; nempe, si duæ variabiles quantitates *AP*, *AQ*, invariabilem semper rationem inter se habentes, accedant ad fixas quantitates *AB*, *AD* propius quàm pro datâ quâvis differentiâ, ratio limitum *AB*, *AD* eadem est ac invariabilis ratio quantitatum *AP*, *AQ*.

Hâc methodo propter tœdium improbatâ, superioris ævi geometræ aliam, cui nomen indivisibilium methodus impositum est, excogitarunt. Attamen principia quibus innititur hæc argumentandi ratio a fautoribus ejus duriora esse conceduntur; atque alii, dum ipsas quæ assumuntur hypotheses captum humanum superare affirmant, hujusce methodi inventores iter sane ad veritatem corripuisse, vires vero demonstrationis mathematicæ infirmasse, judicarunt. Sequuntur hujusce generis ratiocinandi exempla quædam à clarissimo Wallisio desumpta.

Considerantur lineæ ex innumeris punctis constare, superficies ex lineis, et solida ex superficiebus; vel forsan circulus ex innumeris sectoribus, sphæra ex pyramidibus, et sic in cæteris: et in computandis magnitudinum rationibus secundùm hanc methodum, computanda est summa omnium indivisibilium elementorum, ex quibus superficies vel solida accuratè componi supponuntur.
Tab. 1. Fig. 6. Exempli gratiâ: Supponatur parabola *APBB* constare ex lineis quarum una est *PP*, inscriptum triangulum, et circumscriptum parallelogrammum ex æquali numero linearum *TT*, *CC*: probando summam omnium linearum *PP* in parabolâ esse ad summam omnium *TT* in triangulo ut 4 ad 3, et ad summam omnium *CC* in parallelogrammo ut 2 ad 3, concludunt, aream parabolæ esse ad aream trianguli ut 4 ad 3, et ad aream parallelogrammi ut 2 ad 3. Simili modo ad solida applicatur methodus: supponantur enim parabolois, inscriptus conus, et circumscriptus cylindrus ex circulis *PP*, *TT*, *CC* constare, et si probetur summam circulorum *PP* esse ad summam *TT* ut 3 ad 2, et ad summam *CC* ut 3 ad 6, concludunt solida esse in eâdem proportione.

Methodus hæc ratiocinandi, modo cautè applicetur, satis demonstrativa esse jure habetur; ut ex demonstratione celeberrimæ illius propositionis Archimedis abunde confirmatur; — nempe, sphæram esse ad cylindrum inscriptum ut 2 ad 3.
Tab. 1. Fig. 7. Secentur cylindrus, hemisphærium, et conus ejusdem basis et altitudinis, planis ad basim parallelis, quorum unum est *CSKDC*: quoniam $SO^2 = CD^2 = SD^2 + DO^2 = SD^2 + DK^2$; et quoniam circuli, quorum hæ lineæ sunt semidiametri, sunt ut earum quadrata; sequitur, summam omnium circulorum in cylindro æqualem esse summæ omnium circulorum in hemisphærio, unà cum summâ omnium in cono: ipse igitur cylindrus, qui ex his circulis componi supponitur, æqualis erit hemisphærio et cono simul sumptis: conus autem est tertia pars cylindri; ergo, hoc sublato, manet hemisphærium ad cylindrum ut 2 ad 3.

Quàm cautè vero applicanda est hæc methodus ex sequentibus exemplis patebit. Si circulus consideretur tanquam polygonum cujus latera in infinitum diminuuntur, et proinde arcus minimus cum chordâ ejus perfectè coincidere

dere ſupponatur, ſequitur, tempus vibrationis penduli in hoc arcu eſſe æquale tempori deſcenſûs per chordam ejus: ex mechanicis vero patet, quòd ratio hæc, ſi accuratè aſſignari poſſit, ſit ratio quadrantis circuli ad diametrum. Neque aliter ſolvi poteſt hæc difficultas, ni recurratur ad indiviſibilia elementa prioribus infinitè minora. SECTIO PRIMA.

Aliter. Si corpus a quiete decidat uniformi vi gravitatis agitatum, et tempus deſcenſûs ejus dividi concipiatur in infinitè parva momenta, quæ per indiviſibiles partes *ab*, *bc*, *cd* lineæ *an* exprimuntur; et ſi velocitates ſint in his momentis uniformes, et per lineas *bp*, *cq*, *dm* repreſentatæ, ſpatia deſcripta rectè exprimentur per rectangula, *ap*, *bq*, *cm*; in duobus igitur momentis ſecundùm hanc methodum tria deſcribuntur æqualia rectangula, in tribus ſex, et ſic deinceps: ſpatia autem deſcripta revera ſunt ut quadrata temporum; in duobus igitur momentis deficit quarta pars ſpatii, in tribus tertia pars, &c. TAB. I. FIG. 8.

Etiamſi exhauſtionum methodus, quâ uſi ſunt veteres in theorematis ſuis difficilioribus inveſtigandis atque demonſtrandis, principiis innitatur quæ et ratio et bis mille annorum autoritas et uſus confirmarant; tamen hæc demonſtrationis forma, quæ forſan autori noſtro celeberrimo propter evidentiam ejus exploratam multùm arrideret, ob longas ambages atque obliquam veritatis inveſtigandæ rationem vehementer diſplicuit. Majoribus vero moleſtiis ſe urgeri perſentit, ſi indiviſibilium doctrinam ad theoremata ſua ſtabilienda converteret. Etenim ipſe conceptus quantitatum illis quæ ſenſibus offeruntur infinitè minorum videtur eſſe perdifficilis; nec ratiociniis inde deductis conceditur fides omnium conſenſu ſtabilita. Newtonus igitur, theoremata illa præclara, quorum veritas lemmatum ſequentium ope deducitur, demonſtrationis formâ confirmare, ut aliquibus placet, antea inauditâ, non indignum judicavit: quæ à nobis ſane reſtat explicanda, atque eâ ratione illuſtranda, ut ſimul eluceant et hujuſce methodi perſpicuitas, et evidentia, atque ad ſequentia accommodatio.

Supponuntur magnitudines non ex partibus indiviſibilibus conſtare, ſed motu perpetuo generari: *Lineæ nempe deſcribuntur, ac deſcribendo generantur, non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum, ſuperficies per motum linearum, ſolida per motum ſuperficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, et ſic in cæteris. Hæ geneſes in rerum naturâ locum verè habent, et in motu corporum quotidie cernuntur.* Ex finitis igitur magnitudinum hoc modo genitarum incrementis vel decrementis, quæruntur primæ vel ultimæ rationes, quibuſcum magnitudines ipſæ naſcuntur, vel evaneſcunt, vel etiam in infinitum augentur. Hæ vero rationes primæ vel ultimæ inveſtigantur obſervando limites rationum, quæ inter variabiles magnitudines obtinent, dum finitæ ſunt; limites nempe eos ad quos magnitudinum rationes perpetuò accedunt, quos nunquam tranſgredi, neque etiam attingere poſſunt, ſed ad quos propius accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ. Ultimæ igitur rationes magnitudinum evaneſcentium, et primæ naſcentium, non ſunt rationes quas magnitudines ipſæ unquam inter ſe habent, ſed limites omnium variabilium rationum.

Li-

Limites omnium variabilium rationum facillimè inveſtigantur reducendo quantitates, quibus generaliter rationes illæ exprimuntur, in terminos quorum pars una ex variabili parte minime pendet; et ſupponendo variabilem illam partem vel evaneſcere, vel in infinitum augeri. Exempli gratiâ: Sint duæ quantitates $ax^n + bx^{n-1}$ et $cx^n + dx^{n-1}$ variabiles propter variabilem x; dividendo per x^{n-1} reducitur ratio hæc ad rationem $ax + b$ ad $cx + d$: evaneſcat x, et fit $ax + b : cx + d :: b : d$; augeatur x in infinitum, et fit $ax + b : cx + d$ (vel $a + \frac{b}{x} : c + \frac{d}{x}$) $:: a : c$. Rationes igitur b ad d, et a ad c ſunt limites omnium variabilium rationum, quæ obtinent inter quantitates $ax^n + bx^{n-1}$ et $cx^n + dx^{n-1}$ dum diminuitur vel augetur valor quantitatis x; quos tamen nunquam tranſgrediuntur, neque attingunt dum x finita eſt; ſed ad quos propius accedere poſſunt quàm pro datâ quâvis differentiâ.

Reſtat ut priuſquam huic procemio finem imponamus, de accommodatione hujuſce methodi ad virium centripetarum et centrifugarum theoriam perpauca ſubjungamus.

Rationes, quas inter ſe habent ideæ ſpatii, temporis, velocitatis et vis, reſpectu ad earum quantitates vel gradus, exprimi poſſunt vel per notas in arte analytica uſurpatas, vel per varios extenſionis gradus et modos: requiritur ſolummodo ut in his ideis earumque menſuris conſiderandis eadem geneſeos ac variationis conſervetur norma. Si vis acceleratrix agere fingatur intercedentibus finitis et æqualibus temporis periodis, durante unaquâque periodo, prior manet velocitas; ſed hæc, addita velocitati novo vis impulſu generatæ, efficit, ut corpus deinceps motu majori, uniformi vero in ſingulâ periodo, feratur; et differentiæ ſpatiorum, quæ temporibus hiſce æqualibus et finitis deſcribuntur, accuratæ erunt menſuræ differentiarum inter varias velocitates his impulſibus generatas. Si intervalla temporum minuantur, hæ menſuræ in eâdem proportione decreſcunt; et ſi intervalla hæc perpetuò minuantur, ut tandem accedamus ad ſtatum quo indeſinenter agit vis, hoc eſt, ſi intervalla temporum perpetuò accedant ad evaneſcentiæ ſtatum, virium effectus determinantur explorando leges quantitatum quæ ſecundùm normam ſimilem variantur. Proinde, ſi ex hypotheſi indiviſibilium quidquam de earum proprietatibus demonſtrari poſſit, virium acceleratricium effectus et correſpondentes relationes ſimul deteguntur; ſimiliter, ſi ſecundùm Newtoni methodum à variationibus finitis magnitudinum geometricarum ipſarum relationes inveniantur, eodem tempore inveniri poſſunt vel leges virium acceleratricium vel ſpatia his viribus deſcripta. — Et, quoniam patet vim acceleratricem impulſus ſuos non edere poſt finita temporis intervalla, ſed agere eam indeſinenter; ſpatia, vi tali deſcripta, eâdem methodo inveſtigari nequeunt, quâ ſpatia finitis intervallis à ſe invicem diſtincta: neceſſariò igitur requiritur ut aliâ inveſtigationis ratione utamur, hoc eſt, ut vel indiviſibilium vel rationum primarum ac ultimarum doctrina in æſtimandis virium acceleratricium quantitatibus et effectibus uſurpetur.

Si

TAB. I

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6

Fig. 7.

Fig. 8.

Si vis acceleratrix in eâdem directione quâ imprimitur vis projectilis corpus sollicitet, motus erit rectilineus quidem, sed ob continuam ejus accelerationem oportet ut ad ultimarum rationum doctrinam recurramus si spatia datis quibusvis temporibus descripta determinare velimus. — Si directio vis acceleratricis cum motu projectili in angulo quocunque componatur, corpus, à directione tangentis perpetuò sollicitatum, à motu rectilineo retrahitur, et in curvam detorquetur; prout conspicere licet in corporibus prope superficiem telluris projectis. Curvam insuper generari nisi motu puncti directionem suam perpetuò mutantis concipere non licet. Quoniam igitur et curva et semita corporis vi centripetâ vique projectili agitati simili prorsus modo generantur, patet quòd ab iisdem mediis, quibuscum curvarum proprietates deteguntur, determinari etiam possunt leges virium quarum actione corpora in curvas detorquentur; et proinde, si ope primarum ac ultimarum rationum curvarum proprietates commodè investigari possint, necesse est ut concedatur Newtono doctrinam hanc ad virium centripetarum leges effectusque determinandos applicare.

LEMMA

LEMMA I.

SECTIO PRIMA.

Quantitates, ut et quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito [b] *constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ, fiunt ultimò æquales.*

SI negas; fiant ultimò inæquales, et sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ *D:* contra hypothesin. [c]

LEM-

[b] 2. Quantitates ad æqualitatem tendere dicuntur quarum differentia, mutatâ utcunque quantitatum magnitudine, ita variatur, ut minorem perpetuò rationem habeat ad quantitates ipsas.

3. Fieri potest, ut quantitates ad æqualitatem tendant, et tamen non fiant ultimò æquales. Ex. gr. Areæ dantur hyperbolicæ, quæ in infinitum protensæ nunquam in tempore finito dato rectangulo æquales fiunt: sumatur rectangulum hoc dato rectangulo majus; et differentia inter aream hyperbolicam perpetuò auctam et hoc rectangulum perpetuò minorem habet rationem ad aream ipsam hyperbolicam, nunquam vero minor evadet quantitate datâ quæ assignari potest: hæ igitur quantitates, quamvis ad æqualitatem tendunt, nunquam fiunt æquales.

[c] 4. Variari fingantur quantitates secundum hanc legem, nimirum ut earum differentia semper decrescens capi possit, ut quæ ad quantitates ipsas habeat rationem perpetuò minorem ratione quâvis quæ assignari potest; velocitates, quibuscum hæ quantitates generari incipiunt, sunt æquales. Si enim velocitates in primo momento ponantur inæquales, tum quantitates his velocitatibus descriptæ erunt etiam inæquales, et proinde, talis assignari potest differentia, quæ non habeat ad quantitates ipsas rationem quâvis assignabili minorem; quod hypothesi contradicit.

5. Quoniam veritas hujusce Lemmatis stabilitur deducendo contrariam quamvis hypothesin ad absurdum, parum differt ratiocinandi forma ab eâ, quâ usi sunt veteres; Newtonus vero, hoc Lemmate, quasi axiomate vel principio quodam fundamentali, innixus, methodo directâ in sequentibus utitur, quorum demonstrationes ad hoc semper revocantur, et quasi in eo continentur.

6. Abs re forsan non erit hujusce Lemmatis sensum exemplis quibusdam simplicissimis illustrare.

Ex. I.

TAB. II. FIG. 9. Ex puncto *A* in diametro *BD* circuli *BCD* ducatur linea quævis *AC*, quæ circa punctum *A* versus *AB* immotam revolvatur, et punctum *C* in peripheriâ

pheriâ circuli inveniatur. Patet [El. iii. 7.] lineam *AC* augeri donec tandem ad lineam *AB* perveniat. — Hæ quantitates *AB* et *AC* [ſecundùm hoc Lemma] tempore finito ad æqualitatem tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ, ideoque ſunt ultimò æquales. — Tempus finitum eſt tempus motûs puncti *C* ad punctum *B*; per verbum ultimò intelligitur ipſius *C* ad *B* appulſus; et proportio *AC* ad *AB* in hoc momento eſt ultima harum quantitatum ratio; *i. e.* ratio æqualitatis. SECTIO PRIMA.

Ex. II. Similiter, ſi punctum *E* in diametro *BD* productâ ſumatur, et jungantur *E* et *C* puncta; linea *EC* dum punctum *C* verſus *B* moveatur diminuitur [El. iij. 8.]; eadem vero eſt concluſio ut priùs: ſcilicet ratio *EC* ad *EB* eſt ultimò ratio æqualitatis.

Ex. III. Circuli diametro *BD* immotâ manente, ad eam appropinquet linea *FG*, quæ parallela ei ducitur, et motu ſibi parallelo fertur. Tali motu augetur *FG* [El. iij. 15.]; ad æqualitatem igitur cum *BD* tendit, et ante finem temporis finiti propius ad eam accedit quàm pro datâ quâvis differentiâ, ideoque *FG* ac *BD* fiunt ultimò æquales.

Tria hæc exempla ad quantitates ſolummodo attinent; Lemma vero de rationibus quantitatum ad æqualitatem tendentibus loquitur, et idcirco ſequentia duo ad hoc illuſtrandum adhibeantur.

Ex. IV. Datis poſitione rectis *HI*, *HK*, *LMN*, et à puncto *O* in lineâ *LN* ductâ rectâ lineâ *OPQ*, ratio *QO* ad *PO* major eſt quàm ratio *LO* ad *MO*: ſi autem linea *OPQ* circa punctum *O* revolvatur, et ad lineam *OL* appropinquet, manifeſtum eſt rationem *QO* ad *PO* diminui, ideoque nullam aſſignari poſſe rationem majorem illâ quam fert *OL* ad *OM*, quantulacunque ſit inter eas differentia, quin linea *OQ* ad *OL* eo uſque accedat, ut ratio *OQ* ad *OP* fiat tandem aſſignatâ illâ minor; — Ideoque *LO* ad *MO* eſt ultima ratio lineæ *OQ* ad lineam *OP*. TAB. II. FIG. 10.

Ex. V. Iiſdem manentibus ratio trianguli *QLO* ad triangulum *PMO* major eſt quàm ratio duplicata lineæ *LO* ad lineam *MO*; ob acceſſum verò *OQ* ad *OL* ut priùs, ratio triangulorum ad rationem illam duplicatam perpetuò accedit; et ratio duplicata *OL* ad *OM* eſt ultima ratio trianguli *OLQ* ad triangulum *OMP*.

Si in his quinque exemplis lineam eandem motu contrario ferri, et ex limitibus iiſdem motum ſuum incipere concipiamus, rationes illæ, quæ modò ultimæ fuerunt, mutato verbo primæ vocantur. — Ex. Gr. Si linea *OQ* à lineâ *OL* recedat, et ex tali receſſu naſcantur prædicta triangula, ratio duplicata *LO* ad *MO* eſt prima naſcentium triangulorum ratio. De cæteris ſimiliter.

Sectio Prima.

LEMMA II.

Tab. II. Fig. 11.

Si in figurâ quâvis AacE, *rectis* Aa, AE *et curvâ* acE *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, et lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; et compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, et numerus augeatur in infinitum: dico quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *et curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*

Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl, Lm, Mn, Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* et altitudinum summa *Aa*, id est, rectangulum *ABla*. [d] Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1.) figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimo æquales. Q.E.D.

LEMMA III.

Tab. II. Fig. 11.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, et omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, et compleatur parallelogrammum *FAaf.* Hoc erit majus quam differentia figuræ in-

Tab. II. Fig. 11.

[d] 7. Patet vero, quòd basi *AB* diminutâ, rectangulum *ABla* diminuitur: Si bases *AB, BC, CD, DE* bisecentur in ϵ, γ, δ, ε, differentia inter figuras inscriptas et circumscriptas erit rectangulum Aϵλα; cumque hoc rectangulum Aϵλα minorem perpetuò habet proportionem ad figuras ipsas, hæ figuræ

inſcriptæ et figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D. [e] SECTIO PRIMA.

LEMMA IV.

TAB. II. FIG. 12.

Si in duabus figuris AacE, PprT, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, et ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ* AacE, PprT, *ſunt ad invicem in eadem illa ratione.*

Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, et ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figura priore (per lemma III.) ad ſummam priorem, et figura poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. Q.E.D.

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; et partes illæ, ubi numerus earum augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi

guræ ad æqualitatem tendunt [2]. Continuâ vero biſectione linearum *AB*, *BC*, &c. differentia hæc minor fit quovis dato rectangulo. Ergo (per lemma 1, &c.)

[e] 8. Si chordæ *ab*, *bc*, *cd*, *dE* duci concipiantur, et inſcribi trapezia, *AabB*, *BbcC*, &c. porro ſi tangentes ducantur ad puncta *a*, *b*, *c*, *d*, *E*, figura inſcripta et circumſcripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, erunt etiam in ratione æqualitatis. In hoc verò caſu continuâ baſium *AB*, *BC*, *CD* biſectione, figura inſcripta eò augetur, et figura circumſcripta eò diminuitur, ut plus quàm dimidium differentiæ perpetuò auferatur: ideoque per El. x. 1.] differentia earum tandem minor erit quantitate quâvis datâ.

SECTIO PRIMA.

ubi partium et parallelogrammorum numerus augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ ſibi mutuo reſpondent, ſunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; et areæ ſunt in duplicata ratione laterum. [f]

LEMMA VI.

TAB. II. FIG. 13.

Si arcus quilibet poſitione datus ACB *ſubtendatur chorda* AB, *et in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* [g] *tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta*

TAB. II. FIG. 12.

[f] 9. Si parallelogramma in lemmate iv. non ſint numero ſolummodo æqualia, ſed ſint etiam ſimilia, tum ſimiles erunt figuræ *AacE*, *PprT*; eandemque habebunt ad invicem rationem quam rectangula ipſa; *i. e.* rationem laterum duplicatam.

[g] 10. In hoc ſupponere videtur Newtonus, nullam eſſe contrariam curvæ flexuram; nec eſſe punctum *A* cuſpidem; in quibus caſibus curvatura vel infinitè minor eſt, vel infinitè major curvaturâ circuli. Curvæ autem continuæ generantur motu puncti directionem ſuam continuò mutantis, et ſunt ubique verſus eandem partem cavæ. — Circulus nempe eſt curva continua: inter circulum vero et aliam quamvis curvam continuam hoc intereſt, quòd circuli curvatura, ceu ejus à tangente flexura ubique eadem eſt; in aliis autem curvis modo major fit, modo minor. Cum autem diverſorum circulorum à tangente flexura diverſa ſit, curvaturam curvarum circulorum ope exprimunt geometræ. Neque eſt hæc ratiocinandi methodus aut reprehenſibilis, aut conceptu difficilis. Deſcribi poſſunt circuli numero infiniti, qui eandem lineam tangentem, idemque contactûs punctum habent: duci etiam poteſt curva, ita ut ab eâdem rectâ lineâ in puncto eodem tangatur: patet circulos hos omnes curvam illam in puncto contactûs tangere, diverſoſque habere cum curvâ contactûs vel magis vel minus intimi gradus: Ideoque, prout ex rectis lineis, quæ numero infinitæ per idem curvæ punctum tranſeunt, illa ſolummodo curvam tangit, quæ ita ducitur, ut nulla alia recta inter curvam et tangentem duci queat, quin curvam ſecet; ita quoque, ex prædictis circulis, is eſt curvaturæ circulus, qui tam intimè curvam tangit, ut nullus alius per contactûs punctum deſcribi poſſit, qui tranſit inter circulum et curvam; alii verò

puncta A, B *ad invicem accedant et coëant; dico quod angulus* BAD, *sub chorda et tangente contentus, minuetur in infinitum et ultimo evanescet.* SECTIO PRIMA.

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, et propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, et tangentis ad invicem est ratio æqualitatis. [h]

Nam

verò omnes circuli vel intra vel extra circulum curvaturæ necessariò cadunt: et prout recta linea, quæ curvam tangit, cum curvâ illâ coincidere nequit, ita circulus curvaturæ cum curvâ non coincidit.

His præmissis, lemmatis veritas, quæ à Newtono subobscurè deduci videtur, vel forsan ex præconcesso sequenti lemmate profluere, facillimè ex naturâ circuli patet. Nam si curvatura curvæ finita est, et quæ per circulum mensuratur, describi potest alius circulus *ABC*, qui cadet intra et circulum curvaturæ et curvam: angulus autem *BAD*, inter chordam *AB* et tangentem *AD* contentus, æqualis est angulo *ACB* in alterno segmento, et angulus *ACB*, evanescente arcu *AB*, evanescit: idem in curvâ obtinet à fortiori. TAB. II. FIG. 14.

Hinc etiam lemma obtinet, non solum in curvis finitæ curvaturæ, sed à fortiori in omnibus illis, in quibus curvatura infinitè minor est curvaturâ circuli.

[h] 11. Sit *Ad* linea finita, ducaturque *dr* lineæ *DR* parallela, occurrens *AB*, *AR* productis in *b* et *r*: erit *AB* : *AD* : : *Ab* : *Ad* [El. vi. 2.]. Transferatur punctum *B* ad *C*, ducanturque *RCE*, et chorda *AC*; et ratio variabilis chordæ et tangentis fiet ratio *AC* ad *AE*. A puncto *d* ut priùs ducatur *dp* ipsi *ER* parallela, occurrens *AC*, *AR* productis in *c* et *p*; eritque *AC* : *AE* : : *Ac* : *Ad*. Tandem cum angulus sub chordâ et tangente contentus minor fiat quovis angulo rectilineo [Lem. vi.], ratio variabilis *Ac* ad *Ad* accedit propius ad rationem æqualitatis quàm pro datâ quâvis differentiâ; ideoque iis proportionales chorda et tangens sunt ultimò æquales. Quoniam vero arcui *AC* in triangulo *ACE* contento similis describi queat arcus *Ac* in simili triangulo *Acd*; cumque ultimò arcus inter *Ac* et *Ad* intermedius fiat æqualis *Ac* vel *Ad*; arcus quoque *AC* evanescet chordæ vel tangenti æqualis. Q. E. D. TAB. II. FIG. 15.

[12] Hæc propositio, circuli ope hoc modo illustrari potest. — Si à puncto *B* agatur utcunque subtensa *Bd*, efficiens angulum quemlibet finitum TAB. II. FIG. 14.

BDA

SECTIO PRIMA. Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB et AD ad puncta longinqua b ac d produci, et secanti BD parallela agatur bd. Sitque arcus Acb semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coëuntibus, angulus dAb, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ Ab, Ad, et arcus intermedius Acb coincident, et propterea æquales erunt. Unde et hisce semper proportionales rectæ AB, AD, et arcus intermedius ACB evanescent, et rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

TAB. II. FIG. 16. *Corol.* 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc BF ultimo ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo $AFBD$ rationem semper habet æqualitatis ad AD.

Corol. 2. Et si per B et A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, secantes tangentem AD et ipsius parallelam BF; ratio ultima abscissarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque et arcus AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

TAB. II. FIG. 13. *Si rectæ datæ* AR, BR *cum arcu* ACB, *chorda* AB *et tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, et ultima ratio æqualitatis.*

Nam

BDA cum tangente AD, et ducatur linea AC subtensæ BD parallela, similia erunt triangula CAB, ABD; quare AB, AD et $\overline{DB+DA}$ sunt ad invicem ut CA, CB et $\overline{CB+BA}$. Coëat jam punctum B cum A, eruntque CA, CB et $\overline{CB+BA}$ in ratione æqualitatis, ideoque AB, AD et $AD+BD$ sunt ultimò æquales. Quare à fortiori AB, AD et arcus AB sunt ultimò in æqualitatis ratione.

Sectio Prima.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* et *r* produci, ipsique *RD* parallela agi *rbd*, et arcui *ACB* similis semper sit arcus *Acb*, Et coëuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evanescet, et propterea triangula tria semper [i] finita *rAb*, *rAcb*, *rAd* coincident, suntque eo nomine similia et æqualia. Unde et hisce semper similia et proportionalia *RAB*, *RACB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia et æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *et curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *et ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.* Tab. II. Fig. 17.

Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* et *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, et erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* et *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, et secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coëant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; et angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, et his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo et areæ

ABD,

[i] 13. Veritas hujusce lemmatis ex coincidentiâ triangulorum nequaquam pendet, ex lemmate vero superiori, et El. i. 8, satis patet.

SECTIO PRIMA. *ABD*, *ACE* ſunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. Q.E.D.

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque vi finita deſcribit, ſive vis illa determinata et immutabilis ſit, ſive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione temporum.

TAB. II. FIG. 17. Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, et velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; [k] et ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis deſcriptæ, hoc eſt, ipſo motus initio (per lemma IX) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. Q.E.D.

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, et menſurantur per diſtantias corporum a figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus ſine viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime. [l]

Corol. 2.

TAB. II. FIG. 18. [k] 14. Hoc illuſtrare licet ſequenti methodo. Deſcribatur area *DABC* motu lineæ *Dc*, ſibi ipſi parallelo et uniformi: et in eodem tempore deſcribatur linea *PQ* motu uniformi puncti *a*, et repreſentetur velocitas puncti *Q* per lineam *DC*: patet, aream *DABC* et lineam *PQ* in eâdem ratione variari [El. vi. 1.]. Variari fingatur longitudo lineæ moventis *Dc*, et ob variatam puncti *Q* in eâdem ratione velocitatem, eorum effectus in eâdem variantur ratione. Per motum ipſius *D* ad *A*, longitudine *Dc* mutatâ, deſcribitur area *DcbA*, ſpatium igitur à puncto *Q* percurſum, ſeu longitudinem lineæ *PQ* per aream à lineâ *DC* deſcriptam licet exprimere. Cum enim areæ deſcribuntur perpetuo linearum fluxu, lineæque perpetuo punctorum fluxu, ſi velocitas quâcum area creſcit æquetur velocitati puncti moventis, cujus motu linea deſcribitur, rationes linearum, quæ à motu puncti deſcribuntur, accuratè per arearum rationes exprimuntur.

TAB. II. FIG. 19. [l] 15. Sint lineæ *AD*, *ad*, motu uniformi deſcriptæ in temporibus quibuſvis, agant vires his directionibus perpendiculares, quæ corpora detorqueant in curvas *AB*, *ab*, et quoniam eadem eſt directio virium perturbatricium, idem

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires et quadrata temporum conjunctim. SECTIO PRIMA.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directe et quadrata temporum inverſe.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directe et vires inverſe.

LEMMA XI.

Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicata ſubtenſæ arcus contermini.

Caſ. 1. Sit arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, ſubtenſa arcus *AB*. Huic ſubtenſæ *AB* et tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque *I* interſectio linearum *BG*, *AG* ultimo facta ubi puncta *D*, *B* accedunt uſque ad *A*. Manifeſtum eſt quod diſtantia *GI* minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis †. Eſt autem (ex na- TAB. III. FIG. 20.

idem evenire debet ac ſi corpus datum datâ vi acceleratrici ſollicitatum ſpatia diverſa temporibus diverſis deſcriberet, hoc eſt, erunt ſpatia vel errores *DB*, *db* in temporum ratione duplicatâ: ſumantur alia quævis tempora et erunt errores *RK*, *rk* in eâdem temporum ratione duplicatâ. Corpore vero ad *B* pervento motus *Bk* reſolvi poteſt in motus *BL*, *BT*, quorum ſi *BT* directio mutetur ut fiat *BP*, corpus ad finem temporis verſabitur in *Q*, et error *QR* non erit ad errorem *rk* ut priùs in ratione temporis duplicatâ, et proinde neceſſe eſt ut anguli applicationis maneant iidem ſi errores temporis quadrato proportionales eſſe vellemus.

PROPOSITIO.

† 16. — Poſito quòd rectangulum $BD \times DG$ ſit ſemper æquale AD^2, et quòd punctum *G* deſcribat curvam *GgI*, tranſeatque ultimò per *I*; circulus, cujus chorda eſt *AI* et tangens *AD*, eandem habebit curvaturam quàm curva *AbB* in loco *A*. TAB. III. FIG. 21.

D DEM. Oc-

SECTIO PRIMA. natura circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$, et Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$; ideoque ratio

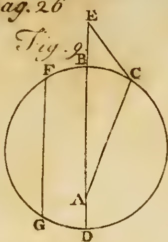
DEM. Occurrat linea DG circulo in C et E; et per naturam circuli erit Rect. $CD \times DE = DA^2 =$ Rect. $BD \times DG$ [per Hyp.]; unde est $CD : BD :: DG : DE$; transeat primò GgI extra circulum, erit semper CD major quàm BD, et transibit curva AbB extra circulum AcC: circulus autem, cujus chorda minor est quàm AI, transibit infra circulum AcC: et circulus, cujus chorda major est quàm AI, transibit extra curvam AbB; nam sit ut priùs $qD : BD :: DG : DQ$, et quoniam est chorda Ai major quàm AI, DG non occurrere potest cum AI, quin fiat DQ major quàm DG, et BD major quam qD: nullus igitur circulus transire potest inter curvam AbB et circulum AcC; et proinde eandem habent curvaturam.

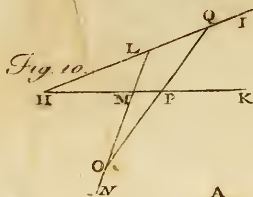
Si transeat IgG intra circulum curvaturæ, eodem argumento patet, quòd BD major sit quàm CD, quòd curva AbB transeat infra circulum AcC, et quòd nullus describi possit circulus, qui non transit vel intra vel extra tam circulum AcC, quàm curvam AbB.

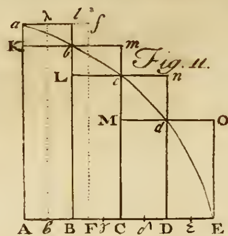
TAB. III. FIG. 22. *Cor.* 1. — Sequitur circulum atque curvam eò propius ad coincidentiam accedere quò minor est angulus GIE. — Sit enim Am alia quævis curva, cujus tangens est AD, et sit rectangulum $mD \times Dg$ semper æquale AD^2, curva Am eandem habebit curvaturam in puncto A quam circulus AC; transeat punctum g inter IG et IE, et quoniam est $Dm \times Dg = AD^2 = DB \times DG$, fit $Dm : BD :: DG : Dg$, ergo Dm major est quàm DB: eodem modo patet, esse $Dm : DC :: DE : Dg$, et Dm minorem esse quàm DC; punctum igitur m transit necessariò intra circulum AC et curvam AB. Exinde patet, diversos esse gradus contactûs pro diverso angulo GIE, si angulus ille finitus esse supponatur. Sit autem angulus GIE ejusdem generis cum angulo inter tangentem et circulum contento, vel habeat curva GI eandem curvaturam cum circulo, et sic deinceps; erit in singulis his casibus contactus curvæ AB cum circulo AC indefinitè propior quàm priùs.

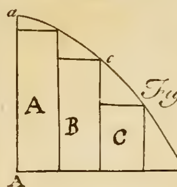
TAB. III. FIG. 23. *Cor.* 2. Si linea AI sit curvæ GI asymptotus, quò major est AI diameter circuli, eò propius accedit circulus ad curvam AB: quoniam autem linea AI indefinitè producta nunquam attingat curvam GI, circulus cujus diameter est AIG nunquam habebit eandem curvaturam cum curvâ AB. In hoc casu diameter curvaturæ indefinitè magna est, vel curvatura indefinitè minor esse dicitur quàm curvatura circuli; uti accidit in vertice parabolæ cubicalis, et in omni curvâ in quâ abscissa est ut dignitas ordinatæ quæ major est quàm quadratum.

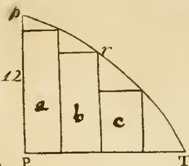
Cor. 3. Transeat GI per punctum A; erit AI diameter curvaturæ indefinitè parva; et curvatura indefinitè major esse dicitur quàm curvatura circuli: hujus exemplum habemus in vertice parabolæ semicubicalis, et in omni curvâ in quâ subtensa est ut dignitas ordinatæ quadrato minor.

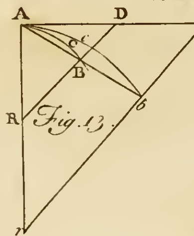

Fig. 9.
E
B
F
C
A
G
D

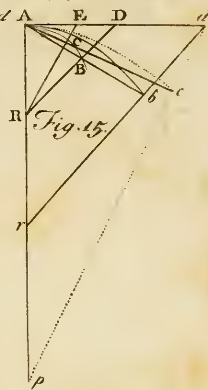

Fig. 10.
Q
I
L
H
M
P
K
O
N

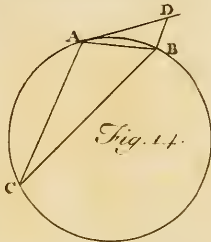

a
λ
f
K
b
m
Fig. 11.
L
c
n
M
d
O
A
B
F
C
D
E

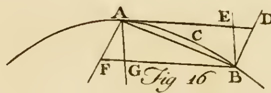

a
c
Fig. 12
A
B
C
A
E

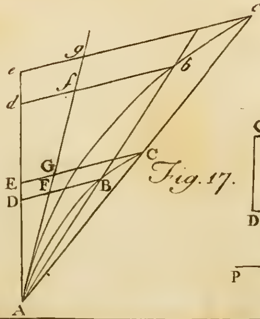

p
r
a
b
c
P
T

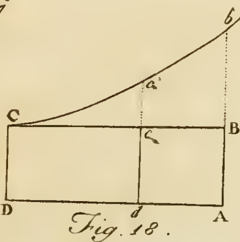

A
D
d
c
C
B
b
R
Fig. 13.
r

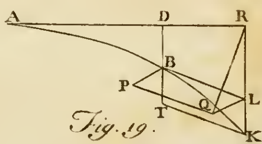

A
E
D
d
C
B
b
c
R
Fig. 15.
r
p

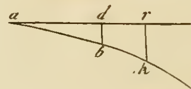

D
A
B
Fig. 14.
C


A
E
D
C
F
G
Fig 16
B


c
g
e
f
b
d
G
C
Fig. 17.
E
F
B
D
A


b
a
C
B
D
d
A
Fig. 18.


A
D
R
B
P
L
Q
T
Fig. 19.
K


a
d
r
b
h

P Q

ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* componitur ex rationibus *AG* ad *Ag* et *BD* ad *bd*. Sed quoniam *GI* aſſumi poteſt minor longitudine quavis aſſignata, fieri poteſt ut ratio *AG* ad *Ag* minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis aſſignata, ideoque ut ratio *AB quad.* ad *Ab quad.* minus differat a ratione *BD* ad *bd* quam pro differentia quavis aſſignata. Eſt ergo, per lemma 1, ratio ultima *AB quad.* ad *Ab quad.* eadem cum ratione ultima *BD* ad *bd*. Q. E. D.

Caſ. 2. Inclinetur jam *BD* ad *AD* in angulo quovis dato, et eadem ſemper erit ratio ultima *BD* ad *bd* quæ prius, ideoque eadem ac *AB quad.* ad *Ab quad.* Q. E. D.

Caſ. 3. Et quamvis angulus *D* non detur, ſed recta *BD* ad datum punctum convergat, vel alia quacunque lege conſtituatur; tamen anguli *D*, *d* communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent et propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis aſſignata, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1. et propterea lineæ *BD*, *bd* ſunt in eadem ratione ad invicem ac prius. Q. E. D.

Corol. 1. Unde cum tangentes *AD*, *Ad*, arcus *AB*, *Ab*, et eorum ſinus *BC*, *bc* fiant ultimo chordis *AB*, *Ab* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ *BD*, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant et ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ *BD*, *bd*.

Corol. 3. Ideoque ſagitta eſt in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea *ADB*, *Adb* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum *AD*, *Ad*, inque ſeſquiplicata laterum *DB*, *db*; utpote in compoſita ratione laterum *AD* et *DB*, *Ad* et *db* exiſtentia. Sic et triangula *ABC*, *Abc* ſunt ultimo in triplicata ratione laterum *BC*, *bc*. Rationem vero ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempe ex ſimplici et ſubduplicata componitur.

 Corol. 5.

SECTIO PRIMA.

Corol. 5. Et quoniam DB, db ſunt ultimo parallelæ et in duplicata ratione ipſarum AD, Ad: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, Adb (ex natura parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, Adb; et ſegmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc ſegmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD, Ad, tum chordarum et arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinite majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinite minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A nec infinite parvam eſſe nec infinite magnam, ſeu intervallum AI finitæ eſſe magnitudinis. Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus nullus per punctum A inter tangentem AD et curvam AB duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore. Et ſi fiat BD ſucceſſive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinite major, et quilibet poſterior infinite major priore. Sed et inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2 et AD^3 inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem [m].

Quæ

TAB. III. FIG. 24.

* [m] 17. Si curvæ AB, AC, et recta AD ſe mutuò contingant in loco A, actâque ſecundùm quamcunque legem rectâ DBC, fuerit DB, vel univerſaliter, vel ſaltem evaneſcens, ut AD^m, et CD ut AD^n, exiſtente m majore quàm n: dico angulum contactûs BAD infinitè minorem fore angulo CAD, et idcirco nullam

Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facile applicantur ad ſolidorum ſuperficies, curvas et contenta. Præmiſi vero hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonſtrationes, more veterum geometrarum, ad abſurdum. Contractiores enim redduntur demonſtrationes per methodum indiviſibilium. Sed quoniam durior eſt indiviſibilium hypotheſis, et propterea methodus illa minus geometrica cenſetur; malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas et rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites ſummarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum demonſtrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; et principiis demonſtratis jam tutius utemur. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas et rationes partium determinatarum, ſed ſummarum et rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed et eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe.

lam lineam curvam ejuſdem generis cum AC duci poſſe inter curvam AB et tangentem ſuam AD.

Eſto enim $BD = \frac{AD^m}{p}$, et $CD = \frac{AD^n}{q}$, poſitis p et q finitis et conſtantibus, erit BD ad CD ut $\frac{AD^m}{p}$ ad $\frac{AD^n}{q}$, vel ut AD^m ad $AD^n \times \frac{p}{q}$, vel ut AD^{m-n} ad $\frac{p}{q}$. Evaneſcat jam AD et ſimul AD^{m-n}, et BD jam erit ad CD ut quantitas evaneſcens AD^{m-n} ad quantitatem finitam $\frac{p}{q}$, vel ut finitum ad infinitum: Eſt itaque ſubtenſa evaneſcens BD infinitè minor ſubtenſâ evaneſcente CD, et propterea angulus BAD angulo CAD. Q. E. D.

SECTIO PRIMA.

esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum et quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter et ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima et ultima est quacum esse (vel augeri aut minui) incipiunt et cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et proportionum omnium incipientium et cessantium. Cumque hic limes sit certus et definitus, problema est vere geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines: et sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

Sectio Secunda.

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere, et esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, et prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per leg. I.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet et pergat in recta *BC*. Ipsi *BS* parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; et completa secunda temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*; et triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atque ideo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successive agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; triangulum *SCD* triangulo *SBC*, et *SDE* ipsi *SCD*, et *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: et componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus et minuatur latitudo triangulorum in infinitum; et eorum ultima perimeter *ADF* erit linea curva [8]: ideoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. Q.E.D.

Tab. III. Fig. 25.

Corol. 1.

Sectio Secunda.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus reciproce ut perpendiculum a centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas in locis illis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ut ſunt baſes æqualium triangulorum *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; et hæ baſes ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa [n].

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus ab eodem corpore ſucceſſive deſcriptorum chordæ *AB*, *BC* compleantur in parellogrammum *ABCV*, et hujus diagonalis *BV* in ea poſitione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; tranſibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in ſpatiis non reſiſtentibus deſcriptorum chordæ *AB*, *BC*, ac *DE*, *EF* compleantur in parallelogramma *ABCV*, *DEFZ*; vires in *B* et *E* ſunt ad invicem in ultima ratione diagonalium *BV*, *EZ*, ubi arcus iſti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* et *EF* componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus *Bc*, *BV* et *Ef*, *EZ*: atqui *BV* et *EZ*, ipſis *Cc* et *Ff* æquales, in demonſtratione propoſitionis hujus generabantur ab impulſibus vis centripetæ in *B* et *E*, ideoque ſunt his impulſibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in ſpatiis non reſiſtentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos ſunt inter ſe ut arcuum æqualibus temporibus deſcriptorum ſagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, et chordas biſecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ ſagittæ ſunt ſemiſſes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6.

[n] 18. Triangula prædicta non ſunt in diverſis orbitis neceſſariò æqualia; quoniam vero baſes diverſorum triangulorum ſint ut areæ directè, et ut perpendicula in ipſas demiſſa inversè; erunt idcirco velocitates, quæ per has baſes repreſentantur, univerſaliter ut areæ triangulorum directè, et ut perpendicula inversè.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, una cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum. SECTIO SECUNDA.

PROPOSITIO II. THEOREMA. II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano deſcripta, et radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum [°].

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in linea curva, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, qua corpus de curſu rectilineo detorquetur, et cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia deſcribere, agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *cC* (per prop. XL. lib. 1. elem. et leg. II.) hoc eſt, ſecundum lineam *BS*; et in loco *C* ſecundum lineam ipſi *dD* parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam *SC*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. Q. E. D. TAB. III. FIG. 25.

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in qua corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, et puncto ſuo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; ſed inde declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam

[°] 19. Hinc facilè colligitur, vires, quibus planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis, et in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem: ex obſervationibus enim conſtat, planetas primarios, paulo celeriùs in periheliis ac tardiùs in apheliis moventes, radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales percurrere.

Sectio Secunda.

quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia [p].

Corol. 2. In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radiorum versus plagam in quam fit motus.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto, describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi composita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, et ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur [q].

Patet a priori.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; et esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. et corol. 2. prop. I. et sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per corol. 4. prop. I. hoc est, ut quadrata

Tab. III. Fig. 26.

[p] 20. Sequitur ex demonstratione quòd, cum areæ sint temporibus proportionales, cC parallela sit lineæ SB, versusque centrum dirigatur. Si augeatur area compleaturque parallelogrammum $xcBv$, (secundùm legum corol. 1.) patet lineam cx, eique parallelam Bv, à centro S versus plagam in quam fit motus declinare. Si diminuatur area, cy, eique parallela Bv à centro S in antecedentia declinat.

[q] 21. Hinc sequitur, vim quâ luna perpetuò retrahitur à motu rectilineo, et in orbe suo retinetur, respicere terram. Constat enim, ex motu ejus apparente cum diametro apparente collato, lunam, radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere. Idem intellige de planetis qui Saturnum et Jovem comitantur.

quadrata arcuum eorundum ad diametros circulorum applicata per lem. vii. et propterea, cum hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, et diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. E. D.

Corol. 1. Cum arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſita ex duplicata ratione velocitatum directe, et ratione ſimplici radiorum inverſe [r].

Corol. 2. Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſita ex ratione radiorum directe, et ratione velocitatum inverſe; vires centripetæ ſunt in ratione compoſita ex ratione radiorum directe, et ratione duplicata temporum periodicorum inverſe [s].

Corol. 3. Unde ſi tempora periodica æquentur, et propterea velocitates ſint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: et contra [t].

Corol. 4. Si et tempora periodica et velocitates ſint in ratione ſubduplicata

[r] 22. Sit C vis centripeta, V velocitas, P tempus periodicum, et R radius; erit $C = \frac{V^2}{R}$. Attamen notandum eſt, cum fingatur eſſe $C = \frac{V^2}{R}$, intelligi quatuor quantitates proportionales; vel vim in unâ orbitâ eſſe ad vim in quâvis aliâ in harum quantitatum ratione, ſcilicet eſſe $C : c :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$; nam quoniam quantitatum rationes omnes gradus variationis admittunt, earum exponentes methodo æquationum comparare licet, et exinde novæ rationes breviter eruentur.

[s] 23. Tempus periodicum eſt ut peripheria circuli, vel ut radius directè, et ut velocitas inversè; unde $PP = \frac{RR}{VV}$, $\frac{1}{P^2} = \frac{V^2}{R^2}$, et $\frac{R}{P^2} = \frac{V^2}{R} = C$.

[t] 24. Sit P data quantitas, quoniam $P = \frac{R}{V}$, data erit $\frac{R}{V}$, et proinde $V = R$, $V^2 = R^2$, et $\frac{V^2}{R} = R = C$. Vel ſi P^2 ſit data, erit $\frac{R}{P^2} = R = C$ ut priùs.

Contra ſit $C = R$, erit $\frac{R}{P^2} = R$; unde data eſt P^2.

ſubduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter ſe: et contra [v]

Corol. 5. Si tempora periodica ſint ut radii, et propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: et contra [u].

Corol. 6. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum, et propterea velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum: et contra [x].

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi tempus periodicum ſit ut radii R poteſtas quælibet R^n, et propterea velocitas reciproce ut radii poteſtas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut radii poteſtas R^{2n-1}: et contra [y].

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, et viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque

[v] 25. Sit P vel $\frac{R}{V} = \sqrt{R}$, erit $V = \sqrt{R}$, et $\frac{V^2}{R} = \frac{R}{R} = 1 = C$, quæ proinde eſt data quantitas. Vel ſi ſit $P = \sqrt{R}$, erit $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R} = 1 = C$, ut priùs. Contra ſit C vel $\frac{R}{P^2}$ data quantitas, erit $P^2 = R$, et $P = \sqrt{R}$.

[u] 26. Sit P vel $\frac{R}{V} = R$, adeoque V data, erit $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R} = C$. Vel ſi ſit $P = R$, erit $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R^2} = \frac{1}{R} = C$, ut priùs. Contra, ſit C vel $\frac{R}{P^2} = \frac{1}{R}$ erit $P = R$.

[x] 27. Sit P^2 vel $\frac{R^2}{V^2} = R^3$, adeoque $V^2 = \frac{1}{R}$, erit $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R^2} = C$. Vel ſi ſit $P^2 = R^3$, erit $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^2} = C$, ut priùs. Contra, ſit C vel $\frac{R}{P^2} = \frac{1}{R^2}$, erit $P^2 = R^3$.

[y] 28. Sit P vel $\frac{R}{V} = R^n$, adeoque $\frac{1}{V} = R^{n-1}$, et $V = \frac{1}{R^{n-1}}$, erit $V^2 = \frac{1}{R^{2n-2}}$, et $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{R^{2n-1}} = C$. Vel ſi ſit $P = R^n$, erit $P^2 = R^{2n}$, et $\frac{R}{P^2} = \frac{R}{R^{2n}} = \frac{1}{R^{2n-1}} = C$, ut priùs. Contra, ſit C vel $\frac{R}{P^2} = \frac{1}{R^{2n-1}}$, erit $\frac{1}{P^2} = \frac{1}{R^{2n}}$, et $P = R^n$.

que in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicata. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, et diſtantias corporum a centris pro radiis uſurpando [2]. SECTIO SECUNDA.

Corol. 9. Ex eadem demonſtratione conſequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis deſcribit, medius eſt proportionalis inter diametrum

[2] 29. LEM. Chordæ curvaturæ figurarum omnium ſimilium, ſimiliter poſitæ, ſunt proportionales lineis quibuſcunque homologis in his figuris. DEM. Sint AB, ab ſimiles et quàm minimæ partes figurarum curvilinearum; et ſint AV, av chordæ curvaturæ ſimiliter inclinatæ tangentibus AD, ad, et ducantur BD, bd, parallelæ chordis AV, av: per naturam ſimilium figurarum erit $BD:DA::bd:da$; eſt autem (16) $BD:DA::DA:AV$, et $bd:da::da:av$; ergo $DA:AV::da:av$. TAB. III. FIG. 27.

30. Deſcribant jam corpora duo ſimiles orbitas AB, ab viribus centripetis ad centra S, s ſimiliter poſita tendentibus, vel ita ut angulus BAS ſit æqualis angulo bas, et SA ſit ad sa, ut lineæ quævis homologæ in figuris ſimilibus; et erit (per lem.) $SA:sa::AV:av$; vires autem centripetæ in locis A, a ſunt ut ſagittæ BD, bd arcuum ſimul deſcriptorum, hoc eſt ut $\frac{BA^2}{AV}$ ad $\frac{ba^2}{av}$, vel ut $\frac{BA^2}{AS}$ ad $\frac{ba^2}{as}$.

31. Vires centripetæ in his locis ſunt etiam ut quadrata velocitatum directè, et ut diſtantiæ inversè: velocitates enim ſunt ut arcus quam minimi ſimul deſcripti.

32. Vires centripetæ ſunt etiam ut diſtantiæ directè, et quadrata temporum periodicorum inversè. Sint enim AB, ab arcus quàm minimi ſimileſque diverſis temporibus T, t deſcripti; et quoniam ſimiles ſimilium arearum partes SAB, sab ſint ad areas totas in eâdem ratione, erunt tempora T, t ut tempora tota periodica P, p. Sint V, v velocitates in arcubus quàm minimis AB, ab; et quoniam velocitates ſunt ut ſpatia illa directè, et ut tempora inversè, erit $V^2 : v^2 :: \frac{AB^2}{T^2} : \frac{ab^2}{t^2} :: \frac{AS^2}{T^2} : \frac{as^2}{t^2}$; unde eſt $\frac{V^2}{AS} : \frac{v^2}{as}$ (hoc eſt vis in loco A ad vim in loco a) $:: \frac{AS}{T^2} : \frac{as}{t^2}$ hoc eſt $:: \frac{AS}{P^2} : \frac{as}{p^2}$. Ex jam demonſtratis deducuntur cætera corollaria in ſimilibus orbitis eodem modo ac in circulis.

Sectio Secunda.

diametrum circuli, et descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum [a].

PRO-

Tab. III. Fig. 28.

[a] 33. * Datâ vi centripetâ, descensus S erit ut quadratum temporis T, hoc est, ob uniformem corporis motum, ut quadratum arcûs AB, vel ut $\frac{AB^2}{AE}$; unde si in casu aliquo particulari, constiterit longitudines S et $\frac{AB^2}{AE}$ æquales esse, semper æquales erunt. Tangat recta AD circulum in A, agaturque subtensa BD diametro AE parallela, et si arcus AB ponatur indefinitè parvus, erit subtensa $BD = \frac{AB^2}{AE}$. Sed in hoc casu est etiam BD æqualis spatio S: nam tempore quàm minimo t considerari potest vis centripeta tanquam agens secundùm rectas diametro AE parallelas: quare in illo casu, ubi arcus AB infinitè parvus est, longitudines S et $\frac{AB^2}{AE}$ æquales sunt; ergo æquales erunt universaliter.

34. Velocitas quâ circulus describitur æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidium radium, si modo vi centripetâ constanti urgeretur æquali vi in circulo: sit enim AL spatium per quod corpus cadere debet ut acquirat velocitatem in circulo, sit AF arcus eodem tempore descriptus cum hâc velocitate, et erit $AF = 2AL$, sed $AF^2 = AL \times AE = 4AL^2$, et proinde $AE = 4AL$, et $AL = \frac{AE}{4}$.

PROBLEMA

35. * Referat S spatium à gravi è quiete demisso, tempore unius minuti secundi descriptum, D diametrum terræ, et seponatur omnis ex aëre resistentia; quæritur quantâ cum velocitate projectile aliquod ex editiore in terræ superficie loco, et secundùm rectam horizonti parallelam emittendum sit, ut fiat planeta secundarius.

Pone factum, et arcus singulis minutis secundis descriptus, medius erit proportionalis inter diametrum D et spatium S. Innotescunt et D et S ex notis terræ magnitudine, et longitudine penduli ad minuta secunda oscillantis. Emittatur itaque projectile tantâ cum velocitate, quantâ sufficiat ad longitudinem $\sqrt{DS}$ spatio unius minuti secundi uniformiter percurrendam, et solvetur problema.

36. *Cor.* Si desideretur tempus periodicum, dicendum est, ut $\sqrt{DS}$ ad totum terræ ambitum, ita tempus unius minuti secundi, ad tempus quæsitum.

37. *Schol.* Ambitus telluris est 123249600 pedum Parisiensium; unde diameter ejus D est eorundem pedum ferè 39231600; sed et spatium S ad eandem mensuram exactum, est $15\frac{1}{12}$ pedum; ergo prodit tandem $\sqrt{DS}$ pedum Gal-

4 licorum

pag. 38

Fig. 20

Fig. 21.

Fig. 22.

Fig. 23

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

SECTIO SECUNDA.

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, et arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, et ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, et producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut ſagitta directe et tempus bis inverſe. [b]

Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (per corol. 4. prop. I.) et augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione ſagitta augetur in ratione illa duplicata (per corol. 2 et 3, lem. xi.) ideoque eſt ut vis ſemel et tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, et fiet vis ut ſagitta directe et tempus bis inverſe. Q.E.D.

Idem facile demonſtratur etiam per corol. 4. lem. x. TAB. IV. FIG. 30.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S deſcribat lineam curvam APQ; tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto

licorum 24326, Anglicorum 25982, hoc eſt, milliarium Anglicorum 4,92083. Tanta itaque debet eſſe velocitas projectilis, quanta ſufficiat ad ſpatium 5 ferè milliarium tempore minuti unius ſecundi uniformiter percurrendum; unde tempus periodicum projectilis erit unius horæ, 24 minutorum primorum, 27 ſecundorum. Ex his autem manifeſtum eſt quòd ſi terra noſtra revolutiones ſingulas circa proprium axem ſpatio unius horæ, 24 minutorum primorum, 27 ſecundorum perageret, partes omnes juxta æquatorem ſitæ gravitatem ſuam omnino amitterent. Quòd ſi terra incitatiore adhuc provolveretur motu, aër omnis et aqua et partes omnes juxta æquatorem, terræ non adhærentes, in ſpatia circumjacentia penitus avolarent, et ibi orbitas ellipticas umbilicos alteros in centro telluris habentes, motu ſuo deſcriberent, ut in ſequentibus luculentiùs conſtabit.

[b] 38. Deſcribantur arcus Qq, Kk in eodem tempore t viribus diverſis c, C; et erit $PC : PR :: c : C$ [per cor. 4. prop. 1]. Deſcribantur arcus Kk, Mm iiſdem viribus in temporibus diverſis t, T, et erit $PR : PL ::$ *$Kk^2 : Mm^2 :: t^2 : T^2$, ob æquabilem motum per arcus evaneſcentes Kk, Mm; his rationibus compoſitis, fiet $PC : PL :: c \times t^2 : C \times T^2$, *i.e.* ſagittæ ſunt ut vires et quadrata temporum. Eadem valet demonſtratio ſi ſumantur ſagittæ PC, PL in orbitis diverſis. TAB. IV. FIG. 29. * Cor. 2 Lem. 11

Sectio Secunda.

punčto quovis P, et ad tangentem ab alio quovis curvæ punčto Q agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam illam SP: vis centripeta erit reciproce ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt punčta P et Q [c]. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcus QP, in cujus medio eſt P, et duplum trianguli SQP ſive $SP \times QT$, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta eſt reciproce ut ſolidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, ſi modo SY perpendiculum ſit a centro virium in orbis tangentem PR demiſſum. Nam rečtangula $SY \times QP$ et $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus eſt, vel circulum concentrice tangit, aut concentrice ſecat, id eſt, angulum contačtus aut ſečtionis cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punčtum P; et ſi PV chorda ſit circuli hujus a corpore per centrum virium ačta: erit vis centripeta reciproce ut ſolidum $SYq \times PV$. Nam PV eſt $\frac{QPq}{QR}$. [d]

Corol. 4.

[c] 39. Sumatur linea, quæ tertia proportionalis eſt lineis QR, QT, patet $\frac{QT^2}{QR}$ huic lineæ æqualem eſſe; ideoque quantitatem $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ eſſe ſolidum: neque evaneſcentibus QT, QR ſolidum hoc evaneſcit; nam linea, quæ ipſis QR, QT evaneſcentibus tertia eſt proportionalis, finita eſt; ideoque ſolidum quod conficitur ex hâc lineâ in SP^2 dučtâ eſt etiam finita quantitas.

Tab. IV. Fig. 31.

[d] 40. Ex naturâ circuli patet triangula QRP, QPV ſimilia eſſe; ideoque $QR : QP :: QP : PV = \frac{QP^2}{QR}$.

41. Hinc etiam patet ſolidum $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ coëuntibus punčtis P, Q eſſe finitum, quoniam æquale eſt areæ finitæ SY^2 dučtæ in lineam finitam PV.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, et chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum SY per corol. 1. prop. 1. [e]. SECTIO SECUNDA.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, et in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$, vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciproce

[e] 42. Notatu dignum est formulas vis centripetæ à Newtono inventas in corollariis 1. 2. 3. non applicari posse ad inveniendas vires centripetas in orbitis diversis, ni areæ, in æqualibus temporibus descriptæ, æquales ponantur in hisce orbitis; substituuntur enim areæ pro temporibus: et proinde hoc corollarium, quatenus à Newtono demonstratur, non applicari potest in comparandis inter se viribus centripetis in orbitis diversis; ponuntur enim areæ temporibus proportionales, et velocitates reciprocè ut perpendicula: attamen ex principiis generalibus sequenti methodo deduci potest. Vis centripeta est semper ut sagitta directè, et tempus bis inversè, vel ut $\frac{QR}{T^2}$; T est ut spatium PQ directè et velocitas V inversè, ergo est T^2 ut $\frac{QP^2}{V^2}$, et $\frac{QR}{T^2}$ ut $\frac{QR \times V^2}{QP^2}$ (substituendo $\frac{QP^2}{PV}$ pro QR) $= \frac{QP^2 \times V^2}{PV \times QP^2} = \frac{V^2}{PV}$.

43. THEOREMA. Velocitas quâ curva quælibet PQ describitur, æqualis est velocitati, quam acquireret corpus cadendo per quartam partem chordæ curvaturæ PV per centrum virium S transeuntis, si modo vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus in puncto P agitatur. DEM. Velocitas, quam corpus hâc vi uniformiter acceleratum per spatium RQ cadendo acquireret, est ad velocitatem quâcum arcus PQ describitur ut $2RQ$ ad PQ; sit PL spatium per quod corpus cadere debet, ut velocitatem quâcum PQ describitur, acquirat; et erit RQ ad PL ut quadratum velocitatis in Q acquisitæ, ad quadratum velocitatis quâcum describitur PQ, vel ut $4RQ^2$ ad PQ^2, et proinde $PL = \frac{PQ^2 \times RQ}{4RQ^2} = \frac{PQ^2}{4RQ} = \frac{PV}{4}$. TAB. IV. FIG. 32.

44. * Ex corollario tertio sequitur vim centripetam esse reciprocè, ut solidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$, posito quòd R sit æqualis PC radio curvaturæ. Nam ob similia triangula VPF, SPY, est $SP : SY :: PF$ vel $2R : PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$, et proinde $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$, hoc est ob datum 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. TAB. IV. FIG. 31.

SECTIO SECUNDA.

proce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

PROPOSITIO VI. PROBLEMA I.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

TAB. IV. FIG. 33.

Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S; corpus in circumferentia latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; et circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; et actâ circuli diametro VA, jungatur AP; et ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z; ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipsi SP parallela sit, et occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, et punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad}{QR}$. Ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id est (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP et cubus chordæ PV conjunctim. Q. E. I. [f]

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: et ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY:

[f] 45. Si virium centrum extra peripheriam circuli locetur, et duci intelligantur lineæ à centro illo circulum tangentes, corpus in concavâ orbitæ parte versatum urgebitur vi centripetâ ad centrum illud tendente: urgebitur vero vi repulsivâ dum motus peragat in orbitæ partibus quarum convexitas virium centro obvertitur. Attamen notandum est, quamquam ex formulis prædictis lex vis centripetæ vel repulsivæ recte exponatur, corpus vi centripetâ in circuli circumferentia latum, si unquam ad contactûs puncta pervenerit, non amplius in circulo

SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, et $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. et 5. prop. v.) vis centripeta eſt reciproce ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc eſt, ob datum AV reciproce ut $SPq \times PV\ cub.$ Q. E. I.

Corol. 1. Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta ſemper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Tab. IV. Fig. 34.

Corol. 2. Vis, qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo et eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, et diſtantiæ corporis à ſecundo virium centro parallela eſt. Nam per conſtructionem hujus propoſitionis vis prior eſt ad vim poſteriorem ut $RPq \times PT\ cub.$ ad $SPq \times PV\ cub.$ id eſt, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$ [g], ſive (ob ſimilia triangula PSG, TPV) ad $SG\ cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim, qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi poteſt, ut $SP \times RPq$, contentum utique ſub diſtantia corporis a primo virium centro S et quadrato diſtantiæ ejus a ſecundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, et corporis a ſecundo virium centro diſtantiæ RP parallela eſt. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem ſunt ac in circulo ejuſdem curvaturæ.

PRO-

culo poſſe moveri, etiamſi vis centripeta in repulſivam verti fingatur: accedet enim ad centrum, vel recedet in infinitum, ut perpendentibus luculenter conſtabit.

[g] 46. Quoniam datur tempus periodicum, daturque area tota per hypotheſin, areæ in æqualibus temporibus deſcriptæ neceſſariò æquales erunt; ſunt enim univerſaliter ut areæ totæ directè, et ut tempora periodica inverſè; quare

Sectio Secunda.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*

Tab. IV. Fig. 35. A ſemicirculi centro *C* agatur ſemidiameter *CA* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* et *N*, et jungatur *CP*. Ob ſimilia triangula *CPM*, *PZT* et *RZQ* eſt *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq*, et ex natura circuli *PRq* æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$, ſive coeuntibus punctis *P* et *Q* rectangulo $QR \times 2\,PM$. Ergo eſt *CPq* ad *PM quad.* ut $QR \times 2\,PM$ ad *QT quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub.}{CP\ quad.}$, et $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Eſt ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt, (neglecta ratione determinata $\frac{2\,SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciproce ut *PM cub.* Q.E.I.

Idem facile colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scholium.

[h] Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in ellipſi, vel etiam in hyperbola vel parabola, vi centripeta, quæ

ſit

quare vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum, et cubi chordarum conjunctim; ideoque vis prior ad vim poſteriorem, &c. (42).

Tab. IV. Fig. 37. [h] 47. Lem. Si à conicæ ſectionis puncto *P* ducatur tangenti perpendicularis *PA* axi occurrens in *A*, diameter curvaturæ *PO* per PA^3 diviſa eadem manet tangentis poſitione utcunque mutatâ. Dem. Nam ſit *CD* diameter conjugata ipſi *CP*, quæ producta occurrat *PO* in *F*; et erit in ellipſi et hyperbolâ $PA \times PF$ data quantitas [Hamilton, Con. Sec. Lib. II. Prop. xxii.] et proinde *PA* ut $\frac{1}{PF}$; eſt etiam *CD* ut $\frac{1}{PF}$ [Ham. L. IV. P. I.], et proinde eſt *PA* ut *CD*, PA^2 ut CD^2, et $\frac{PA^2}{PF}$ vel ei proportionale PA^3 ut $\frac{CD^2}{PF} = \frac{PO}{2}$

[Ham.

ſit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis. SECTIO SECUNDA.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Gyretur corpus in ſpirali PQS *ſecante radios omnes* SP, SQ, *&c.* [i] *in angulo dato; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ſpiralis.* TAB. IV. FIG. 40.

Detur

[Ham. L. V. P. xviii. Cor.]; et exinde ſequitur, eſſe PA^3 ut PO, et $\frac{PO}{PA^3}$ datam quantitatem.

In ellipſi creſcente focorum diſtantiâ manet PA^3 ut PO; et proinde ſi hæc diſtantia infinita evadat, vel mutetur ellipſis in parabolam, erit etiamnum PA^3 ut PO.

48. Sit jam BPZ ſectio quævis conica, cujus axis eſt BA, et vis centripeta ad punctum adeo longinquum tendat, ut lineæ omnes PS, RS, pro parallelis haberi poſſint, ſintque ad axem perpendiculares. Sit PA perpendicularis tangenti PY, et ad axem producta; PO diameter circuli curvaturæ, et PV chorda ejus per centrum virium tranſeuns: ob ſimilia triangula eſt $QT^2 : QP^2 :: PM^2 : PA^2$, ergo $QT^2 = \frac{QP^2 \times PM^2}{PA^2}$, et $\frac{QT^2}{QR} = \frac{QP^2 \times PM^2}{QR \times PA^2} = PV \times \frac{PM^2}{PA^2}$: ſed eſt $PA : PM :: PO : PV = \frac{PO \times PM}{PA}$, quo ſubſtituto fit $\frac{PM^3 \times PO}{PA^3} = \frac{QT^2}{QR}$, quod ob datum SP^2 eſt reciprocè ut vis; eſt autem $\frac{PO}{PA^3}$ data quantitas per LEM. ideoque manet vis ut $\frac{1}{PM^3}$. TAB. IV. FIG. 36.

[i] 49. Revolvatur radius SL circa centrum S motu uniformi, dum punctum P à centro illo recedit velocitate quæ ſemper proportionalis eſt diſtantiæ: Curva, à puncto P deſcripta, ſecat omnes radios in angulo dato. Nam ſint radii ST, SR, SP, &c. viciniſſimi, et ad æquales ab invicem diſtantias; patet hoſce radios eſſe in progreſſione geometricâ; eſt enim $qR : aT :: SP : SR$: ſed $qR : aT :: qR + SP : aT + SR :: SR : ST$; ergo eſt $SP : SR :: SR : ST$; ſunt autem anguli PSR, RST æquales per hyp. et proinde triangula PSR, RST ſimilia ſunt, et angulus SRP æqualis angulo STR. TAB. IV. FIG. 38, et 39.

50. Si deſcribatur circulus circa centrum S radio ST, arcus circuli rationes radiorum ſpiralis menſurabunt: ſint enim arcus quilibet TL, LO, OW, &c. inter ſe æquales, et ducantur SL, SO, SW, &c. quoniam ST, SR, SP, &c. ſunt in ratione geometricâ, ratio ST ad SP eſt duplicata ipſius ST ad SR; ſed eſt etiam TO duplus ipſius TL: ſimiliter, ratio ST ad SM eſt triplicata ipſius ST ad SR, et eſt etiam TW triplus ipſius TL, et ſic deinceps; hinc curva hæc ſpiralis logarithmica nominatur.

5 51. Si

SECTIO SECUNDA. TAB. IV. FIG. 40.

Detur angulus indefinite parvus PSQ, et ob datos omnes angulos dabitur ſpecie figura $SPRQT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc eſt (ob datam ſpecie figuram illam) ut SP. [k] Mutetur jam utcunque angulus PSQ, et recta QR angulum contactus QPR ſubtendens mutabitur (per lemma xi.) in duplicata ratione ipſius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc eſt ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ eſt ut SP *cub.* ideoque (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta eſt reciproce ut cubus diſtantiæ SP. Q.E.I.

Idem aliter.

[l] Perpendiculum SY in tangentem demiſſum, et circuli ſpiralem concentrice ſecantis chorda PV ſunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* eſt ut $SYq \times PV$, hoc eſt (per corol. 3. et 5. prop. v.) reciproce ut vis centripeta.

PRO-

[k] 51. Si angulus PSQ angulo pSq non ſit æqualis, fiat angulus $PSL = pSq$, eritque $qt : qr :: LM : LN$, et $\frac{qt}{qr} = \frac{LM}{LN}$, et $\frac{qt^2}{qr} : \frac{LM^2}{LN} :: qt : LM :: Sp : SP$; ſed ob ſimilia triangula $LM^2 : QT^2 :: LP^2 : QP^2 :: LN : QR$, ideoque $\frac{LM^2}{LN} = \frac{QT^2}{QR}$, et proinde $\frac{qt^2}{qr} : \frac{QT^2}{QR} :: Sp : SP$.

[l] 52. LEM. Chorda curvaturæ PV per centrum S ſpiralis logarithmicæ tranſeuntis æqualis eſt $2\,SP$. Sint enim puncta P, Q ad invicem viciniſſima; lineæ Pr, Qr perpendiculares ad curvam in his punctis occurrent in centro curvaturæ r: à rectis angulis rPQ, rQL, ſubducantur anguli æquales SPQ, SQL, et erit angulus rPC æqualis angulo CQS, æquantur vero anguli verticales ad C, ergo eſt angulus $QSP = Q$rP; angulus QrP ad centrum circuli æqualis eſt duplo angulo QVP ad peripheriam, et proinde eſt $PV : PS :: 2 : 1$.

53. Subſtituendo $2\,SP$ pro PV, et SP pro SY, fit ſolidum $SY^2 \times PV$ proportionale $2\,SP^3$, et proinde eſt vis centripeta ut $\frac{1}{SP^3}$.

Fig. 29.

Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 35

Fig. 36.

Fig. 37

Fig. 38

Fig. 39.

Fig. 40.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; et si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex conicis)† rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* et (ob similia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* et conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* et PC *quad.* ad PF *quad.* id est, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, et $BC \times CA$ pro $CD \times PF$‡, nec non (punctis P et Q coëuntibus) $2PC$ pro vG, et ductis extremis et mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia PC. Q.E.I.

Tab. V. Fig. 41.

Idem aliter.

[m] In recta PG ab altera parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv; deinde cape uV, quæ sit ad vG ut est DC *quad.*

54. Velocitas in spirali logarithmicâ æqualis est velocitati, quâcum corpus eâdem vi centripeta ad eandem distantiam circulum describeret. Patet enim diametrum hujusce circuli æqualem esse chordæ PV [per lem.]; unde velocitates in his orbitis æquales sunt (43).

[m] 55. Aliter. Ex conicis, $Pv \times vG : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$, unde ductis extremis et mediis in se mutuo, et substitutis QR pro Pv, et $2PC$ pro vG, fit QR

† Ham. Con. Sec. L. I. P. xxxi. Cor. I. ‡ Ham. L. IV. P. I.

Sectio Secunda.

quad. ad PC *quad.* Et quoniam ex conicis eſt Qv *quad.* ad PvG ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Adde rectangulum uPv utrinque, et prodibit quadratum chordæ arcus PQ æquale rectangulo VPv; ideoque circulus, qui tangit ſectionem conicam in P et tranſit per punctum Q, tranſibit etiam per punctum V. Coëant puncta P et Q, et ratio uV ad vG, quæ eadem eſt cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG ſeu PV ad $2PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis, qua corpus P in ellipſi revolvitur, erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. v.) hoc eſt (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC. Q.E.I.

Corol. 1.

$QR \times 2PC \times CD^2 = Qv^2 \times PC^2$, ceu $\frac{2CD^2}{PC} = \frac{Qv^2}{QR} = PV$; quare $PV \times PF^2 = \frac{2CD^2 \times PF^2}{PC}$, et ob datum $2CD^2 \times PF^2$, eſt vis centripeta inverſè ut $\frac{1}{PC}$, ceu ut PC directè.

56. Lem. Cum diameter curvaturæ PO ſit ad chordam PV ut PC ad PF, erit $PO = \frac{PV \times PC}{PF}$, ſed $PV = \frac{2CD^2}{PC}$, ergo $PO = \frac{2CD^2}{PF}$, et conſequenter radius circuli $Pr = \frac{CD^2}{PF}$.

57. Hinc Prob. iv. aliter ſolvitur, nam in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, ſubſtituatur $\frac{CD^2}{PF}$ pro Pr, et fit vis centripeta ut $\frac{CP \times PF}{CD^2 \times PF^3} = \frac{CP}{CD^2 \times PF^2}$, hoc eſt, ob conſtantem $CD^2 \times PF^2$ directè ut CP.

58. Cor. Velocitas in ellipſi eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam, ut ſemidiameter conjugata CD ad diſtantiam CP. Eſt enim velocitas prior ad poſteriorem, in ratione ſubduplicatâ chordæ curvaturæ PV ad diametrum circuli $2CP$ (43), hoc eſt, ut $\sqrt{\frac{2CD^2}{PC}} : \sqrt{2PC} :: \sqrt{2CD^2} : \sqrt{2PC^2} :: CD : PC$.

Tab. V. Fig. 42.

59. Cor. 2. Hinc velocitas in ellipſi æqualis eſt velocitati in circulo in quatuor illis locis, in quibus diametri conjugatæ æquales ſunt. Æquales vero diametri conjugatæ ſequenti methodo inveniuntur: ſint Aa, Bb axes, ducantur

tur

[n] *Corol.* 1. Eſt igitur vis ut diſtantia corporis a centro ellipſeos: et viciſſim, ſi vis ſit ut diſtantia, movebitur corpus in ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipſis migrare poteſt. SECTIO SECUNDA.

[o] *Corol.* 2. Et æqualia erunt revolutionum in ellipſibus univerſis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipſibus ſimilibus æqualia ſunt (per corol. 3. et 8. prop. iv.) in ellipſibus autem communem habentibus axem majorem ſunt ad

tur *BA*, *Ba*, et patet ex conicis lineam *CP*, quæ biſecat *BA* in *O*, æqualem eſſe lineæ *CD*, quæ biſecat *Ba* in *n*: patet præterea *BA* et *ab*, *Ba* et *Ab* eſſe inter ſe parallelas, ideoque *CP*, *CD* eſſe diametros conjugatas.

60. Quoniam velocitas in ellipſi eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam, ut ſemidiameter conjugata ad diſtantiam, et velocitas in hoc circulo ad velocitatem in quâvis aliâ ellipſi ad eandem diſtantiam, ut diſtantia illa ad conjugatam diametrum in ellipſi poſteriori, erunt velocitates in his ellipſibus, datâ diſtantiâ, ut ſemidiametri conjugatæ.

[n] 61. Projiciatur corpus à puncto *P* datâ cum velocitate, ſecundùm datam directionem *PY*, et ſit vis centripeta in directâ ſimplici ratione diſtantiæ à centro *C*; ſi *PY* ſit ad *PC* perpendicularis, et velocitas projectionis æqualis velocitati quam corpus *P* acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ *PC*, vi in *P* perpetuò agente, orbita erit circulus cujus centrum eſt *C*. Si vero alia ſit velocitas, vel ſi *PY* non ſit ad *PC* perpendicularis, ob datas vim atque velocitatem in puncto *P* datur chorda curvaturæ *PV*; inveniatur media proportionalis inter *CP* et $\frac{PV}{2}$, et huic æquales ponatur *CD* parallela ipſi *PY*, et diametris conjugatis *CD*, *CP* deſcribatur ellipſis: patet per Prop. x. hanc ellipſin deſcribi poſſe, cum vi quæ eſt ut diſtantia: patet præterea velocitatem, lineam directionis, ac vim in hâc ellipſi, eaſdem eſſe ac in orbitâ quam *P* deſcribit; quare corpus *P* neceſſariò moveri incipiet, eodem modo ac corpus revera in ellipſi movetur: proximum igitur punctum eſt punctum in ellipſi, et velocitas, linea directionis, et vis, eædem ſunt in hoc puncto ac in ellipſi, corpora igitur eodem modo pergent moveri in proximo arcu, et ſic deinceps. TAB. V. FIG. 43.

[o] 62. *Aliter*. Tempus periodicum eſt ut area tota, vel ut rectangulum ſub axibus directe, et ut area dato tempore deſcripta inverſè, *i. e.* ut $\frac{CD \times PF}{QP \times PF} = \frac{CD}{QP}$; ſed eſt $\frac{QP^2}{QR} = PV = \frac{2\,CD^2}{CP}$; ergo eſt $QP^2 = \frac{2\,CD^2 \times QR}{CP}$; QR, vel vis centripeta eſt per hypotheſin ut *CP*, quare QP^2 eſt ut CD^2, QP ut *CD*, et $\frac{CD}{QP}$ data quantitas. TAB. V. FIG. 41.

SECTIO SECUNDA.

ad invicem ut ellipſion areæ totæ directe, et arearum particulæ ſimul deſcriptæ inverſe; id eſt, ut axes minores directe, et corporum velocitates in verticibus principalibus inverſe; hoc eſt, ut axes illi minores directe, et ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inverſe; et propterea (ob æqualitatem rationum directarum et inverſarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si ellipſis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; et vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Hoc eſt theorema *Galilæi*. Et ſi coni ſectio parabolica (inclinatione plani ad conum ſectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi attractiva in repulſivam verſa. [p] Et quemadmodum in circulo

TAB. V. FIG. 44.

[p] 63. * Sunto *AP*, *Ap* duæ lineæ curvæ communem habentes verticem *A*, abſciſſamque communem *AQ*; ea vero ſit harum curvarum indoles, ut actâ communi ordinatâ *QpP*, ordinata *QP* ſit ſemper ad ordinatam *Qp* in datâ ratione. Revolvantur jam in his figuris duo corpora *P* et *p* vi centripetâ tendente ad punctum quodvis *S* in abſciſsâ communi *AQ* eâve productâ conſtitutum; ſintque corporum *P*, *p* tempora periodica æqualia: dico, vim centripetam in loco *P* fore ad vim centripetam in loco *p*, ut diſtantia *SP* ad diſtantiam *Sp*. Primò enim cùm tempora periodica æquentur, areæ ſimul deſcriptæ erunt ut areæ totæ harum figurarum, hoc eſt, in ratione *QP* ad *Qp*. Jam vero figura mixtilinea *APQ* erit ad figuram mixtilineam *ApQ*, ut *QP* ad *Qp*; et triangulum *SPQ* erit ad triangulum *SpQ* etiam in ratione *QP* ad *Qp*; ergo, componendo, erit area mixtilinea *ASP* ad aream *ASp* ut *QP* ad *Qp*: quare, quo tempore radius *SP* percurrit aream *ASP*, radius *Sp* percurret aream *ASp*; adeoque ſi corpora *P* et *p* ſimul exeant de loco *A*, ſimul pervenient ad ordinatam communem *QpP*. Quare motus corporum *P* et *p* ſecundùm rectas ipſi *AS* parallelas agentes, æquales erunt. Porro cum *QP* ſemper ſit ad *Qp* in datâ ratione, motus et motuum mutationes, et vires mutantes ſecundùm rectas ipſi *QP* parallelas agentes, ſemper erunt in datâ ratione *QP* ad *Qp*. Referat jam *SP* vim centripetam corporis *P* in loco quovis *P*, et reſolvi poteſt vis *SP* in vires *QP*, *QS*; ergo vis centripeta corporis *p* exprimi debet per rectam *Sp*; quare vis centripeta in loco *P* eſt ad vim centripetam in loco *p*, ut diſtantia *SP* ad diſtantiam *Sp*. Q.E.D.

Servatis ordinatarum *QP*, *Qp* longitudinibus, mutetur jam angulus *SQp* ne ordinatæ *QP*, *Qp* amplius jaceant in eâdem rectâ; et applicari poteſt præcedens demonſtratio ad hunc caſum, ſimiliter atque ad priorem; hoc eſt, corpora

circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissa positum; hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in abscissa positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

PROPOSITIO X. THEOREMA VI.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates et spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis et sinibus versis respective proportionales [q].

Corol. 1.

corpora P et p simul pervenient ad ordinatas QP, Qp, et vis centripeta in loco P erit ad vim centripetam in loco p adhuc ut distantia SP ad distantiam Sp. Q. E. D.

[q] 64. Si corpus non cadat perpendiculariter, describet ellipsin [Cor. i. p. ix.] centrum habentem in centro virium. Sit ARP ellipsis illa, et centrum ejus S: super hujus semiaxe majori AS describatur quadrans circuli ADE, et per corpus decidens transeat recta CPD ad AS perpendicularis, actisque DS, PS, erit area ASD areæ ASP, ideoque etiam tempori proportionalis. Manente semiaxe AS minuatur perpetuò latitudo ellipseos, et semper manebit area ASD tempori proportionalis: minuatur latitudo illa in infinitum, et orbe ARP jam coincidente cum AS, descendet corpus in rectâ AS, et area ASD, ceu arcus AD evadet tempori proportionalis. Ducatur jam cd parallela et quàm proxima ipsi CD, et velocitas quâ describitur lineola Cc erit ut spatium directè et tempus inversè, vel ut $\frac{Cc}{Dd}$, *i. e.* ut $\frac{Dr}{Dd}$, actâ Dr parallelâ Cc, vel, ob similia triangula, ut $\frac{CD}{SD}$, et ob datum SD ut sinus rectus CD. Patet vero corpus describere sinum versum AC. Tab. V. Fig. 45.

Sectio Secunda.

Corol. 1. Hinc æqualia ſunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, et corpus aliud revolvendo deſcribit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia ſunt tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. 3. prop. IV.) æquantur [r].

PROPOSITIO XI. PROBLEMA V.

Poſita cujuſcunque generis vi centripeta, et conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta aſcendentis vel deſcendentis tum velocitas in locis ſingulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in recta *ADEC* cadat corpus *E*, deque loco ejus *E* erigatur ſemper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipſo motus initio cum perpendiculari *AB*, et erit corporis velocitas in loco quovis *E* ut recta, quæ poteſt aream curvilineam *ABGE*. Q.E.I. (Tab. V. Fig. 46.)

In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ poteſt aream *ABGE*, reciproce proportionalis, et ſit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, et cujus aſymptotos eſt recta *AB* producta; et erit tempus, quo corpus cadendo deſcribit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. Q.E.I.

Etenim in recta *AE* capiatur linea quam minima *DE* datæ longitudinis, ſitque *DLF* locus lineæ *EMG*, ubi corpus verſabatur in *D*; et ſi ea ſit vis centripeta, ut recta, quæ poteſt aream *ABGE*, ſit ut deſcendentis velocitas, erit area ipſa in duplicata ratione velocitatis, id eſt, ſi pro velocitatibus in *D* et *E*, ſcribantur V et V+I,

[r] 65. Si linea *AS* in ſemicycloidem vulgarem permutetur, manente longitudine, et lege vis centripetæ, patet tempora et velocitates eodem modo repreſentari poſſe ſive corpus in curvâ cycloidali, ſive in lineâ rectâ deſcendat; et proinde tempora omnia, quibus corpora à locis quibuſvis ad punctum infimum deſcendunt, eſſe æqualia: vires enim acceleratrices ſunt directè ut diſtantiæ ab hoc puncto.

V + I, erit area *ABFD* ut VV, et area *ABGE* ut VV+2VI+II, et divisim area *DFGE* ut 2VI+II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo *DF* ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam *DE*, ut lineola illa directe et velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe et tempus inverse, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est ut longitudo *DF*. Ergo vis ipsi *DF* vel *EG* proportionalis facit ut corpus ea cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream *ABGE*. Q.E.D. [s].

Sectio Secunda.

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* describatur, sit ut velocitas inverse, ideoque inverse ut linea recta quæ potest aream *ABFD*; sitque *DL*, atque ideo area nascens *DLME*, ut eadem linea recta inverse: erit tempus ut area *DLME*, et summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea *AE* describitur ut area tota *ATVME*. Q.E.D.

Corol. 1. Si *P* sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatum acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco *D*, et in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ sit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, et compleatur rectangulum *PDRQ*, eique

Tab. V. Fig. 47.

[s] 66. Propositionis hujusce tantummodo conversam Newtonus demonstrare videtur; ex demonstratis vero facillimè ipsius propositionis veritas deduci potest. Probatur nimirum, posito quòd quadratum velocitatis areæ proportionale sit, vim ipsam per lineam *DF* representari; si igitur, lineâ *DF* vim representante, velocitatis quadratum non sit ut area *ABFD*, representari fingatur quadratum velocitatis per aream *ABKD* majorem vel minorem areâ *ABFD*, et prodibit ex Newtoni demonstratis vis ut linea *DK*, quæ major est vel minor lineâ *DF*, contra hypothesin.

Sectio Secunda.

que æqualis abſcindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, cum ſit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad 2VI, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id eſt, ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; et ſimiliter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut ſemiſſis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; ſintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum naſcentium) ut vires generatrices, id eſt, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ naſcentes $DFGE$, $DRSE$; erunt ex æquo areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut ſemiſſes totarum velocitatum, et propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. 2. Unde ſi corpus quodlibet de loco quocunque D data cum velocitate vel ſurſum vel deorſum projiciatur, et detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam eg, et capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut eſt recta quæ poteſt rectangulum $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel auctum, ſi locus e eſt loco D inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum $PQRD$.

Corol. 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD +$ vel $- DFge$, et capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P, et cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam PD eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam PE in ſubduplicata ratione PD ad PE, id eſt (lineola DE jamjam naſcente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2PD$ ad $2PD + DE$, et diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam De, ut area $DLME$ ad aream $DLme$, et ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

PRO-

PROPOSITIO XII. THEOREMA VII.

Si corpus, cogente vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, et corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, et moveatur corpus aliud a *V* in linea curva *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* et *E*, curvæque *VIK* in *I* et *K*, occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; et in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, et habeant corpora in *D* et *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* et *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; et si vis una *IN* (per legum corol. II.) resolvatur in duas *NT* et *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in *D* et *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* et *IK* describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *DE* et *IK*, ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* et *IK*, sunt ut *DE* et *IT*, *DE* et *IK* conjunctim, id est ut *DE quad.* et $IT \times IK$ *rectangulum*. Sed

Tab. V. Fig. 48.

Sectio Secunda. *rectangulum* $IT \times IK$ æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quad.* et propterea accelerationes in tranſitu corporum a *D* et *I* ad *E* et *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* et *K*: et eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. Q. E. D.

Sed et eodem argumento corpora æquivelocia et æqualiter a centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politiſſimo et perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, et corpus aliud recta aſcendat vel deſcendat, ſintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuſcunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel impedimento vaſis abſolute lubrici idem præſtatur quod vi tranſverſa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, ſed tantum cogitur de curſu rectilineo diſcedere.

Corol. 2. Hinc etiam ſi quantitas P ſit maxima a centro diſtantia, ad quam corpus vel oſcillans vel in trajectoria quacunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate ſurſum projectum aſcendere poſſit; ſitque quantitas A diſtantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, et vis centripeta ſemper ſit ut ipſius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ eſt numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. Namque velocitas recta aſcendentis ac deſcendentis (per prop. XI.) eſt in hac ipſa ratione.

Tab. V. Fig. 46. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus ſequentia facillime deducuntur.

67. Si cadat corpus à loco *A* verſus centrum virium *C*, et vis centripeta ſit conſtans; patet aream *ABGE* eſſe rectangulum; et quadratum velocitatis ob datam altitudinem ut baſis *AE*. Exinde ſequitur velocitatem acquiſitam in hoc caſu eſſe in ſubduplicatâ ratione ſpatii deſcripti.

Tab. V. Fig. 49. 68. Si cadat corpus à loco *A* verſus centrum virium *C*, et vis centripeta ſit in directâ ſimplici ratione diſtantiæ ab hoc centro, atque erigantur ſemper perpendiculares *AB*, *EG* proportionales diſtantiis *AC*, *EC*, erunt puncta *C*, *G*, *B*, in eâdem rectâ lineâ: dividatur jam trapezium *ABGE*, in triangula *AEB*, *EBG*,

$\overline{EBG}$, et erit area ejus ut $AB \times AE + EG \times AE$, ſeu ut $AC \times AE + EC \times AE = \overline{AC + EC} \times AE = ED^2$, ſi ED ſit ſinus rectus circuli, centro C et radio CA deſcripti; eſt igitur velocitas in E acquiſita ut rectus ſinus ED. SECTIO SECUNDA.

69. Hinc patet, quòd ſi corpus vi agitatum quæ variatur in directâ ratione diſtantiæ rectà à peripheriâ circuli ad centrum deſcendat, acquiret illud velocitatem illam quâ in circulo movetur; ſit enim AB vis centripeta in loco A, ſitque AE æqualis dimidio radio circuli AD, et compleatur rectangulum $ABRE$, patet velocitatem in circulo AD eſſe ut radix quadratica areæ $ABRE$ (34): erigantur perpetuò perpendicula EG quæ ſunt ad AB, ut diſtantiæ EC ad AC, et compleatur triangulum ABC; erit area ejus æqualis areæ rectanguli $ABRE$, unde (per cor. 1. prop. XI) C locus eſt ad quem deſcendet corpus, ut acquirat velocitatem æqualem velocitati in circulo.

70. Hinc etiam determinari poteſt altitudo ad quam corpus aſcendet ſi ſurſum projiciatur à loco A eâ cum velocitate quâ circulus deſcribitur, et interea agitetur vi quæ eſt in directâ ratione diſtantiæ à centro: iiſdem enim poſitis, erigatur ſemper perpendicularis ab, quæ ſit ad AB, ut aC ad AC, et compleatur trapezium $abBA$ æquale rectangulo $ABRE$, erit a altitudo ad quam corpus aſcendet (per cor. 1. prop. XI.) eſt autem area trianguli Cab ad aream trianguli CAB ut 2 ad 1 (per Hyp.), et ob ſimilia triangula ut Ca^2 ad CA^2, unde eſt $Ca : CA :: \sqrt{2} : 1$.

71. Ex his datur etiam altitudo ad quam corpus aſcendet, ſi ſurſum projiciatur à puncto quovis in ellipſi eâdem velocitate quâ peripheria ejus vi ad centrum tendente deſcribitur, poſito quòd in aſcenſu ſuo agitetur vi quæ variatur in directâ ratione diſtantiæ. Patet enim (ex prop. XII.) corpus à diverſis orbitæ cujuſvis punctis hoc modo projectum, ad eandem ſemper altitudinem à centro virium aſcendere: determinetur altitudo in caſu illo in quo velocitas æqualis eſt velocitati in circulo ad eandem diſtantiam, et data erit in omni alio. Inveniantur igitur æquales conjugatæ ſemidiametri CD, CK (59), et erit altitudo Cd ad CD ut $\sqrt{2}$ ad 1. (70). TAB. V. FIG. 50.

72. Altitudo Cd, ad quam corpus rectà projectum aſcendit, æqualis eſt lineæ BA quæ jungit vertices axium. Nam (ex conicis) eſt rectangulum $DEG : BE^2 :: DC^2 : CK^2$, ſed $DC^2 = CK^2$, ergo rect. $DEG = BE^2$, ſed rect. $DEG = CD^2 - CE^2$ (per El. II. 5.) ergo $BE^2 = CD^2 - CE^2$, et $CD^2 = BE^2 + CE^2 = 2BE^2$, quare $2CD^2 = 4BE^2 = BA^2$, unde $BA : CD :: \sqrt{2} : 1$, et $BA = Cd$.

73. Ex his ſequitur circulum altitudinis tranſire per puncta interſectionum tangentium illarum quæ per vertices axium ellipſis ducuntur.

Sectio Tertia.

SECTIO III.

De motu corporum in conicis ſectionibus excentricis.

PROOEMIUM.

Qui phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus qualitates ſpecificas et occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ ſcholaſticæ, ab *Ariſtotele* et Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos effectus ex corporum ſingularibus naturis oriri; at unde ſint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; ſermonem quendam philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam et intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras et magnitudines, incertoſque ſitus et motus; quin et fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges mechanicas accuratiſſime

TAB. V

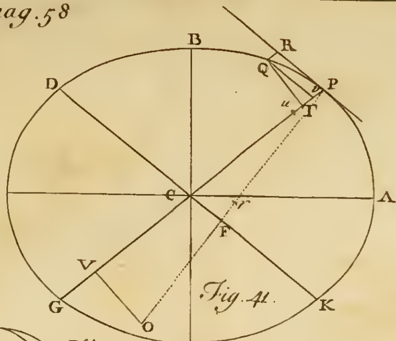


Fig. 41.

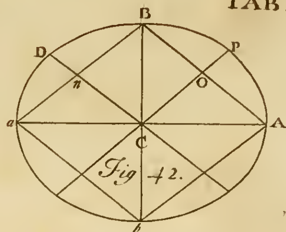


Fig. 42.

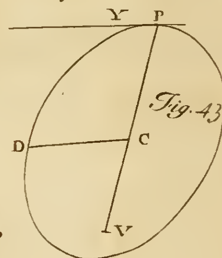


Fig. 43

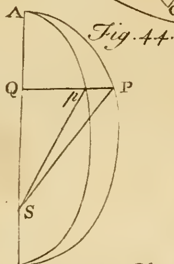


Fig. 44.

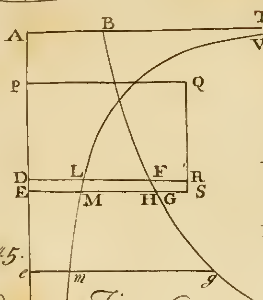


Fig. 46.

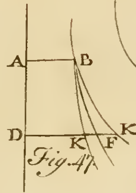


Fig. 47

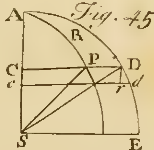


Fig. 45.

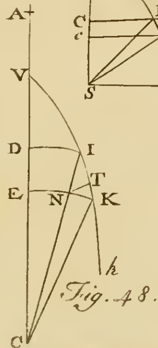


Fig. 48.

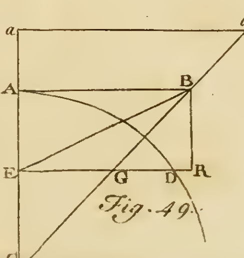


Fig. 49.

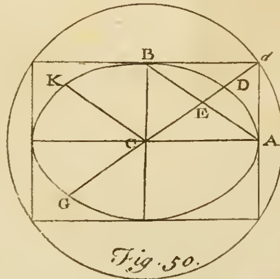


Fig. 50.

ratiſſime procedant; fabulam quidem elegantem forte et venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philoſophiam ſcilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem principii loco aſſumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analytica et ſynthetica. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longe optima, quam præ cæteris merito amplectendum cenſuit celeberrimus auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit in qua excolenda atque adornanda operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, mundani nempe ſyſtematis explicationem e theoria gravitatis feliciſſime deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille et ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, et ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Ut argumenti ſumatur exordium a ſimpliciſſimis et proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in terreſtribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cæleſtia, longiſſime a ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; et oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam et utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuo æqualia;

 cederet

SECTIO TERTIA.

cederet pondus minus majori, et partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam et utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet aëris resistentia: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram et terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo et componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeo corpora omnia terrestria se mutuo trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cælis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde vero sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeo

adeo de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus necessario aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indesinenter a tangentibus deflectantur. Sectio Tertia.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur et certissime demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano descripta, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcunque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios vero circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, qua perpetuo detorquentur a tangentibus rectilineis et in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non inepte vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; a quacunque demum causa oriri fingatur.

Quin et hæc quoque concedenda sunt, et mathematice demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, et quadrata temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata distantiarum *.

Similiter si corpora plura in ellipsibus diversis circa centrum virium commune revolvantur et quadrata temporum periodicorum sint ut cubi mediocrium à centro virium distantiarum, in hac sectione geometrice demonstratur vires centripetas tendentes ad hoc centrum

* Phænomenon I. *Planetarum quinque primariorum, et vel solis circa terram vel terræ circa solem tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum à sole.*

Hæc à Keplero inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive sol circa terram sive terra circa solem revolvatur, ac de mensurâ quidem temporum periodicorum convenit inter astronomos universos, magnitudines autem orbium Keplerus et Bullialdus omnium diligentissime ex observationibus determinarunt: et distantiæ

SECTIO TERTIA.

centrum in communi omnium ellipſium foco locatum, eſſe reciproce in duplicata ratione diſtantiarum. Hoc autem nunc pro conceſſo habeatur.

Ex

diſtantiæ mediocres quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ ſequente videre licet.

Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus et partibus decimalibus diei.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275.	4332,514.	686,9785.	365,2565.	224,6176.	87,9692.

Planetarum ac telluris diſtantiæ mediocres à ſole.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Secund. Kep.	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secund. Bull.	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Sec. temp. per.	954006.	520096.	152369.	100000.	72333.	38710.

De diſtantiis Mercurii et Veneris à ſole diſputandi non eſt locus, cum hæ per eorum elongationes à ſole determinentur.

De diſtantiis etiam ſuperiorum planetarum à ſole tollitur omnis diſputatio per eclipſes ſatellitum Jovis. Etenim per eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit, et eo nomine habetur Jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ et geocentricâ inter ſe collatis determinatur diſtantia Jovis.

Phæn. 2. *Tempora periodica Planetarum circumjovialium, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.*

Orbes horum Planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis Jovi concentricis. Eorum vero tempora periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; idem etiam ex tabulâ ſequente manifeſtum eſt.

Satellitum Jovialium tempora periodica

$1^d.18^h.27'.34''$. $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

Diſtantiæ Satellitum à centro Jovis.

Ex obſervationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis.
Townlei per microm.	5,52	8,78	13,47	24,72	
Caſſini per teleſcop.	5	8	13	23	
Caſſini per eclip. ſatell.	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temp. Period.	5,667	9,017	14,384	25,299	

Phæn. 3.

Sectio Tertia.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuo agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper verſus orbitarum centra : conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ab eodem : et augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui eadem proportione qua diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtituta inter planetarum vires centripetas et vim gravitatis, annon ejuſdem forte ſint generis. Ejuſdem vero generis erunt, ſi deprehendantur hinc et inde leges eædem, eædemque affectiones. Primo itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi a viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus : hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quam minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam verſus terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur, ad ſpatium quod eodem tempore quam minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcus a luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeo computari poteſt ex datis tum lunæ tempore periodico, tum diſtantia ejus a centro terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit

Phæn. 3. *Tempora periodica Planetarum circumſaturniorum, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.*

Caſſinus utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni et periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d.21^h.18'.27''$. $2^d.17^h.41'.22''$. $4^d.12^h.25'.12''$. $15^d.22^h.41'.14''$. $79^d.7^h.48'.00''$.

Diſtantiæ Satellitum à centro Saturni in ſemidiametris annuli.

Ex obſerv.	$1\frac{19}{20}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	8.	24.
Ex temp. per.	1,93.	2,47.	3,45.	8.	23,35.

SECTIO TERTIA.

docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo†, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, erit ut quadratum ſemidiametri terræ, ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperius oſtenduntur, vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim lunæ centripetam prope terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta prope terræ ſuperficiem æqualis eſt vi gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem: ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in terram caderent quam ex vi ſola gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, qua luna perpetuo de tangente vel trahitur vel impellitur et in orbita retinetur, ipſam eſſe vim gravitatis terreſtris ad lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin et actione mutua, terra viciſſim in lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac philoſophia, ubi agitur de maris æſtu et æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum lunæ tum ſolis in terram oriundis. Hinc et illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis gravitatis decreſcat in majoribus a tel-

lure

† Colligitur hoc ex calculo per corollarium nonum propoſitionis quartæ confecto. Nam arcus illius, quem luna tempore unius minuti primi, medio ſuo motu, ad diſtantiam ſexaginta ſemidiametrorum terreſtrium deſcribat, ſinus verſus eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. et lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ diſtantiæ ratione inversâ, ideoque ad ſuperficiem terræ major ſit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus, vi illa in regionibus noſtris cadendo, deſcribere deberet ſpatio minuti unius primi pedes Pariſienſes $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, et ſpatio minuti unius ſecundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. et lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ deſcendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Lutetiæ Pariſiorum ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis longitudo eſt pedum trium Pariſienſium et linearum $8\frac{1}{2}$, ut obſervavit Hugenius. Et altitudo, quam grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribit, eſt ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam Hugenius): ideoque eſt pedum Pariſienſium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$: et propterea vis quâ luna in orbe ſuo retinetur, ſi deſcendatur in ſuperficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque eſt illa ipſa vis quam nos gravitatem dicere ſolemus.

lure diſtantiis. Nam cum gravitas non diverſa ſit a vi centripeta lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur et gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa ſolem et ſecundariorum circa Jovem et Saturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum ſolis, ſecundariorum verſus centra Jovis et Saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta verſus terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut luna gravitat in terram, et terra viciſſim in lunam, ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos et primarii viciſſim in ſecundarios; ſic et omnes primarii in ſolem, et ſol viciſſim in primarios.

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat et univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum ſolem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, et ſol in ipſos.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, et ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, et nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt, ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſeculo feliciter inventam et per obſervationes certiſſime demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, et radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce vero phænomenis manifeſtum eſt et mathematice comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem et eſſe reciproce ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeo ſolis vis attractiva non tantum ad corpora planetarum in da-

SECTIO TERTIA.

tis diſtantiis et in eodem fere plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cælorum regionibus et in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit.

Concluſiones præcedentes huic innituntur axiomati, quod a nullis non recipitur philoſophis; effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas et eaſdem eſſe proprietates quæ nondum cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi gravitas ſit cauſa deſcenſus lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America?* Si gravitas mutua fuerit inter lapidem et terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America?* Si vis attractiva lapidis et terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America?* Si attractio terræ ad omnia corporum genera et ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America?* In hac regula fundatur omnis philoſophia: quippe qua ſublata nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per obſervationes et experimenta: inde vero non niſi per hanc regulam de rerum univerſarum naturâ judicamus.

Jam cum gravia ſint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint extenſa, mobilia et impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint gravia. Corporum extenſio, mobilitas, et impenetrabilitas non niſi per experimenta, innoteſcunt; eodem plane modo gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, extenſa ſunt et mobilia et impenetrabilia: et inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, extenſa eſſe et mobilia et impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt gravia, de quibus obſervationes habemus: et inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas non-

dum

dum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit neque extenſa eſſe, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel gravitas habebit locum; vel extenſio, mobilitas, et impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum extenſionem, mobilitatem, et impenetrabilitatem.

Sunt qui gravitatem præter naturam eſſe dicunt, et miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cùm in phyſicâ præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ et ipſa philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt: quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex cauſis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon et hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota phyſica cœleſtis vel ideò minùs placet, quòd cum *Carteſii* dogmatibus pugnare et vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere et amplecti licebit, et cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas et nondum comprobatas. Ad veram philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis verè exiſtentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit ſummus Opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut à pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua verè atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in philo-

Sectio Tertia.

ſophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo pondere vel ab intus concluſo elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum horologium reverà ſit inſtructum pondere; ridebitur qui fingit elaterem, et ex hypotheſi ſic præproperè confictâ motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perſcrutari, ut ita motûs propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de philoſophis illis, qui materiâ quâdam ſubtiliſſimâ cœlos eſſe repletos, hanc autem in vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratiſſimè ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen philoſophiam tradidiſſe, et veras cauſas motuum cœleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has reverà exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam oſtenſum fuerit, quâ ratione motus omnes cœleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit et meritò deridenda objectio, ſi quis dixerit eoſdem motus per vortices explicari debere, etiamſi id fieri poſſe vel maximè conceſſerimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore noſtro abundè quidem et clariſſimis rationibus evincitur; ut ſomnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptiſſimo figmento reſarciendo, noviſque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum et cometarum circa ſolem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata et vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque curſûs determinatione moveri, et eandem habere denſitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Conſtat verò planetas et cometas, dùm verſantur in iiſdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque curſûs determinatione moveri. Neceſſariò itaque ſequitur, ut fluidi cœleſtis partes illæ, quæ ſunt ad eaſdem diſtantias à ſole, revolvantur eodem tempore in plagas diverſas cum diverſis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione et velocitate, ut tranſire poſſint planetæ; aliâ,

aliâ, ut tranſire poſſint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, univerſa corpora cœleſtia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos eſſe non ab uno eodemque vortice, ſed à pluribus qui ab invicem diverſi ſint, idemque ſpatium ſoli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem ſpatio contineri, et ſeſe mutuo penetrare motibuſque diverſis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent eſſe conformes delatorum corporum motibus, qui ſunt ſummè regulares, et peraguntur in ſectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poſſit, ut iidem integri conſerventur nec ab actionibus materiæ occurſantis per tot ſæcula quicquam perturbentur. Sanè ſi motus hi fictitii ſunt magis compoſiti et difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum et cometarum; fruſtrà mihi videntur in philoſophiam recipi: omnis enim cauſa debet eſſe effectu ſuo ſimplicior. Conceſſa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes et cometas circumcingi atmoſphæris, ad inſtar telluris noſtræ; quæ quidem hypotheſis rationi magis conſentanea videbitur quam hypotheſis vorticum. Affirmaverit deinde has atmoſphæras, ex naturâ ſuâ, circa ſolem moveri et ſectiones conicas deſcribere; qui ſanè motus multò faciliùs concipi poteſt, quàm conſimilis motus vorticum ſe invicem permeantium. Denique planetas ipſos et cometas circa ſolem deferri ab atmoſphæris ſuis credendum eſſe ſtatuat, et ob repertas motuum cœleſtium cauſas triumphum agat. Quiſquis autem hanc fabulam rejiciendam eſſe putet, idem et alteram fabulam rejiciet: nam ovum non eſt ovo ſimilius, quàm hypotheſis atmoſphærarum hypotheſi vorticum.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens eſt numerus; motus eorum ſunt ſummè regulares, et eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes ſunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, et planetarum regiones liberrimè pertranſeunt, et ſæpè contrà ſignorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certiſſimè

tiſſimè confirmantur ex obſervationibus aſtronomicis: et per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum conſiſtere poſſunt. Cometarum motibus omninò locus non erit; niſi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm ſolem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejuſdem denſitatis erunt ac planeta; uti ſuprà dictum eſt. Itaque materia illa omnis quæ contigua eſt orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus denſitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut conſtitutio vorticis permanere poſſit, debent partes minùs denſæ centrum occupare, magis denſæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum à ſole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem ſervare. Inde verò ſequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Quæ igitur majore intervallo diſtant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde ſi minùs denſæ fuerint, neceſſe eſt ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores aſcendere conantur. Aſcendent ergo denſiores, deſcendent minus denſæ, et locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit diſpoſita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquieſcere jam poſſit in æquilibrio conſtituta. Si bina fluida, quorum diverſa eſt denſitas, in eodem vaſe continentur; utique futurum eſt ut fluidum, cujus major eſt denſitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: et ratione non abſimili omninò dicendum eſt, denſiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere ſupremum locum. Tota igitur illa et multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, denſitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm denſitas et vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens reſiſtentia, et valde admodum ſenſibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs ſiſtere atque abſorbere poſſe meritò videatur. Conſtat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipſos reſiſtentiam pati quæ vel minimùm ſentiri poteſt;

atque

SECTIO TERTIA.

atque adeò neutiquam in materiam ullam incurſare, cujus aliqua ſit vis reſiſtendi, vel proinde cujus aliqua ſit denſitas ſeu vis inertiæ. Nam reſiſtentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua eſt; et ſanè vix obſervari poteſt in fluidis vulgò notis, niſi valdè tenacia fuerint ad inſtar olei et mellis. Reſiſtentia quæ ſentitur in aëre, aqua, hydrargyro, et hujuſmodi fluidis non tenacibus ferè tota eſt prioris generis; et minui non poteſt per ulteriorem quemcunque gradum ſubtilitatis, manente fluidi denſitate vel vi inertiæ, cui ſemper proportionalis eſt hæc reſiſtentia.

Corpora progrediendo motum ſuum fluido ambienti paulatim communicant, et communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Eſt itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, eſt ut fluidi denſitas; ergo retardatio ſeu reſiſtentia erit ut eadem fluidi denſitas; neque ullo pacto tolli poteſt, niſi à fluido ad partes corporis poſticas recurrente reſtituatur motus amiſſus. Hoc autem dici non poterit, niſi impreſſio fluidi in corpus ad partes poſticas æqualis fuerit impreſſioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc eſt, niſi velocitas relativa qua fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id eſt, niſi velocitas abſoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas abſoluta fluidi propulſi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli poteſt fluidorum reſiſtentia, quæ oritur ab eorundem denſitate et vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cœleſtis nullam eſſe vim inertiæ, cùm nulla ſit vis reſiſtendi: nullam eſſe vim quâ motus communicetur, cùm nulla ſit vis inertiæ: nullam eſſe vim quâ mutatio quælibet vel corporibus ſingulis vel pluribus inducatur, cùm nulla ſit vis quâ motus communicetur; nullam eſſe omninò efficaciam, cum nulla ſit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypotheſin, quæ fundamento planè deſtituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inſervit, ineptiſſimam vocare liceat et philoſopho prorsûs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos eſſe volunt,

hanc

Sectio Tertia.

hanc verò non inertem eſſe ſtatuunt: hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nullâ ſecerni poſſit ab inani ſpatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeò uſque dediti materiæ, ut ſpatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus naturæ ſubſidium preſens haberi poſſet ab æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante et implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant fato univerſa regi, non providentia; materiam ex neceſſitate ſuâ ſemper et ubique extitiſſe, infinitam eſſe et æternam. Quibus poſitis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſariò moveatur in plagam aliquam determinatam cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate, in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum et motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis et gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa ſanè ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed obſervando atque experiendo addiſcere debemus. Qui verè phyſicæ principia legeſque rerum, ſola mentis vi et interno rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet

2 vel

vel ſtatuere mundum ex neceſſitate fuiſſe, legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo naturæ, ſe tamen, homuncionem miſellum, quod optimum factu ſit perſpectum habere. Sana omnis et vera Philoſophia fundatur in phænomenis rerum: quæ ſi nos vel invitos et reluctantes ad hujuſmodi principia deducunt, in quibus clariſſimè cernuntur conſilium optimum et dominium ſummum ſapientiſſimi et potentiſſimi Entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibuſdam forſan hominibus minus grata ſunt futura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ diſplicent: verum nomina malitiosè indita non ſunt ipſis rebus vitio vertenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere philoſophiam in atheiſmo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari. SECTIO TERTIA.

Obtinebit igitur apud probos et æquos judices præſtantiſſima philoſophandi ratio, quæ fundatur in experimentis et obſervationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illuſtriſſimi noſtri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, et ad ea porrò pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſſurgere potuiſſe, meritò admirantur et ſuſpiciunt quicunque paulò profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergò reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis mundani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit et penitiùs perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, rex *Alphonſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Itaque naturæ majeſtatem propiùs jam licet intueri, et dulciſſima contemplatione frui, Conditorem verò ac Dominum univerſorum impenſiùs colere et venerari, qui fructus eſt philoſophiæ multò uberrimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis et ſapientiſſimis rerum ſtructuris non ſtatim videat Fabricatoris omnipotentis infinitam ſapientiam et bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

SECTIO TERTIA.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

TAB. VI. FIG. 51.

Esto ellipsis umbilicus S. Agatur SP secans ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, et compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico H lineâ HI ipsi EC parallelâ, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI, adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR, et angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant [t]. Ad SP demittatur perpendicularis QT, et ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2\,BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est, ut PE seu AC ad PC; et $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv,* et GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* et (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q et P coeuntibus est ratio æqualitatis; et Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* id est ut CA *quad.* ad PF *quad.* sive ‡ ut CD *quad.* ad CB *quad.* Et conjunctis his omnibus rationibus, [u] $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis Q et P coeuntibus æquantur $2PC$ et Gv. Ergo et his proportionalia $L \times QR$ et QT *quad.* æquantur.

[t] 74. Est $EI = \frac{1}{2} SI$, $IP = \frac{IP+PH}{2}$, unde $EI + IP = \frac{SP+PH}{2} = AC$.

[u] 75. Conjungantur Rationes

$$\begin{aligned} L \times QR &: L \times Pv :: AC : PC \\ L \times Pv &: Gv \times Pv :: L : Gv \\ Gv \times Pv &: Qv^2 :: PC^2 : CD^2 \\ Qv^2 &: QT^2 :: CD^2 : CB^2 \end{aligned}$$

et fit $L \times QR : QT^2 :: AC \times L \times PC : Gv \times CB^2 :: 2BC^2 \times PC : Gv \times CB^2 :: 2PC : Gv$.

* Ham. Con. Sect. L. I. P. xxxi. Cor. i. ‡ Ham. L. IV. P. i.

æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq$, id eſt, reciprocè in ratione duplicata diſtantiæ SP. Q.E.I.

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipſeos tendens, qua corpus P in ellipſi illa revolvi poteſt, ſit (per corol. 1. prop. IX.) ut CP diſtantia corporis ab ellipſeos centro C; ducatur CE parallela ellipſeos tangenti PR; et vis, qua corpus idem P circum aliud quodvis ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE et PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VI. [v]:) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus ellipſeos, ideoque PE detur, ut SPq reciproce. Q.E.I.

Eadem brevitate, qua traduximus problema quartum ad parabolam, et hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, et uſum ejus in ſequentibus non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PRO-

[v] 76. Nam ſi vires abſolutæ in centris C et S tales eſſe ſupponantur, ut tempora periodica circa hæc centra æqualia ſint, erit (per prop. VI. cor. 3.) vis tendens ad centrum C, vel CP, ad vim tendentem ad focum S, ut $CP \times SP^2$, ad cubum lineæ ductæ à centro C ad tangentem, parallelæ diſtantiæ SP à ſecundo centro virium S, quæ linea æqualis eſt PE: unde vis tendens ad focum eſt ut $\frac{CP \times PE^3}{CP \times SP^2} = \frac{PE^3}{SP^2}$.

77. Lem. Chorda curvaturæ PV quæ per focum ellipſeos tranſit æqualis eſt $\frac{2DC^2}{PE}$. Nam ſit PO diameter curvaturæ, ob ſimilia triangula PEF, PVO, erit $PE : PF :: PO$ (vel $\frac{2CD^2}{PF}$): $PV = \frac{2CD^2}{PE}$. Tab. VI. Fig. 52.

\# Ju art 56

78. Prop. XIII. Aliter. Iiſdem poſitis, demittatur SY perpendicularis à foco S in tangentem, et ob ſimilia triangula SPY, EPF, eſt $SY : SP :: PF : PE$, ideoque $SY^2 = \frac{SP^2 \times PF^2}{PE^2}$, $SY^2 \times PV = \frac{SP^2 \times PF^2 \times 2CD^2}{PE^3}$;

unde,

Sectio Tertia.

PROPOSITIO XIV. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbola: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Tab. VI. Fig. 53. Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; et Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, et compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC, eo quod, acta ab altero hyperbolæ umbilico H linea HI ipſi EC parallela, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR et angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; et (ex natura conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; et (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q et P coeuntibus fit ratio æqualitatis; et Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq ut EPq ad PFq, id eſt, ut CAq ad PFq, ſive ut CDq ad CBq: et conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P et Q coeuntibus

unde, ob data $2CD^2 \times PF^2$, et PE^3, eſt vis centripeta reciprocè ut SP^2. Q. E. I.

[79] Ex accuratiſſimis Tychonis Braheæ obſervationibus invenit Keplerus, planetas non in orbitis circularibus, ſed ellipticis deferri, ſolemque in ellipſeos focorum alterutro verſari: et ex hâc propoſitione conſequitur eos igitur retineri in orbitis ſuis viribus centripetis, quæ in inverſâ duplicata ratione diſtantiarum à ſole variantur.

bus æquantur $2PC$ et Gv. Ergo et his proportionalia $L \times QR$ et QTq æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. et 5. prop. v.) vis centripeta reciproce eſt ut $L \times SPq$, id eſt, reciproce in ratione duplicata diſtantiæ SP. Q. E. I. SECTIO TERTIA.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc diſtantiæ CP proportionalis. Inde vero (per corol. 3. prop. VI.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc eſt, ob datam PE reciproce ut SPq. Q. E. I.

Eodem modo demonſtratur, quod corpus hac vi centripeta in repulſivam verſa movebitur in hyperbola oppoſita.

LEMMA XII.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium eſt proportionale inter diſtantias umbilici a puncto contactus et a vertice principali figuræ.

Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, et SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN et ob æquales MS et SP [y], MN, et NP, MA et AO parallelæ erunt rectæ AN et OP; et inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, et ſimile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS eſt ad SN ut SN ad SA. Q. E. D. TAB. VI. FIG. 54.

Corol.

[y] 80. Sumatur AQ ipſi AS æqualis, et ducatur linea QR perpendicularis et PR parallela ipſi MO; ob AQ et AS, MA et AO [Ham. L. I. P. XLVII.] æquales, æquantur etiam MS, QO; ob QO vero æqualem PR vel SP, tandem æquales erunt MS, SP. TAB. VI. FIG. 54.

SECTIO TERTIA.

Corol. 1. PSq eſt ad SNq ut PS ad SA.

Corol. 2. Et ob datam SA eſt SNq ut PS.

Corol. 3. Et concurſus tangentis cujuſvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipſam perpendicularis eſt, incidit in rectam AN, quæ parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO XV. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

TAB. VI. FIG. 55.

Maneat conſtructio lemmatis, ſitque P corpus in perimetro parabolæ, et a loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipſi SP parallelam QR et perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, et occurrentem tum diametro PG in v, tum diſtantiæ SP in x. Jam ob ſimilia triangula Pxv, SPM, et æqualia unius latera SM, SP, æqualia ſunt alterius latera Px ſeu QR et Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale eſt rectangulo ſub latere recto et ſegmento diametri Pv ‡, id eſt rectangulo $4PS \times Pv$, ſeu $4PS \times QR$; et punctis P et Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in caſu æquale eſt rectangulo $4PS \times QR$. Eſt autem (ob ſimilia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc eſt (per corol. 1. lem. XII.) ut PS ad SA, id eſt, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, et inde (per prop. IX. lib. V. elem.) QTq et $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale $SPq \times 4SA$: et propterea (per corol. 1. et 5. prop. V.) vis centripeta eſt reciproce ut $SPq \times 4SA$, id eſt, ob datam $4SA$ reciproce in duplicata ratione diſtantiæ SP. Q. E. I. [z].

TAB. VI. FIG. 52.

[z] 81. LEM. In omni ſectione conicâ eſt radius circuli curvaturæ Pr æqualis $\frac{L \times SP^3}{2SY^3}$. Eſt enim in ellipſi $CD \times PF = CA \times CB$ [Hamilton

‡ Hamil. Con. Sect. L. II. P. i.

Corol. 1. Ex tribus noviſſimis propoſitionibus conſequens eſt, quod ſi corpus quodvis P ſecundum lineam quamvis rectam PR quacunque cum velocitate exeat de loco P, et vi centripeta, quæ ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum a centro, ſimul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua ſectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; et contra. Nam datis umbilico, et puncto contactus, et poſitione tangentis, deſcribi poteſt ſectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta, et velocitate corporis: et orbes duo ſe mutuo tangentes eadem vi centripeta eademque velocitate deſcribi non poſſunt [a]. SECTIO TERTIA.

PRO-

L. IV. P. I.] unde $CD^2 = \frac{CA^2 \times CB^2}{PF^2}$, et $\frac{CD^2}{PF}$ [vel Pr] $= \frac{CA^2 \times CB^2}{PF^3}$; ob ſimilia autem triangula PFE, SPY, $PF : PE :: SY : SP$, et $PF^3 = \frac{PE^3 \times SY^3}{SP^3}$, quo ſubſtituto, $Pr = \frac{CB^2 \times SP^3}{PE \times SY^3}$; pro $\frac{CB^2}{PE}$ ponatur $\frac{L}{2}$ et $Pr = \frac{L \times SP^3}{2\,SY^3}$. Eodem modo demonſtratur lemma in hyperbolâ. Creſcente focorum diſtantiâ in infinitum, abeat figura elliptica in parabolam, manet $Pr = \frac{L \times SP^3}{2\,SY^3}$.

82. Exinde prop. XIII. XIV. XV. breviter et generatim demonſtrari poſſunt. Nam eſt vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times Pr} = \frac{2\,SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$, hoc eſt ob datum $\frac{2}{L}$ ut $\frac{1}{SP^2}$.

83. Ex calculo à clariſſimo Halleio inito, et quam plurimis obſervationibus aſtronomicis comprobato, conſtat cometas moveri circa ſolem in orbitis parabolicis, vel ellipticis excentricis ad formam parabolarum quam proxime accedentibus: et ex propoſitionibus noviſſimis conſequitur, vires quibus retinentur in orbitis ſuis variari in inverſâ duplicata ratione diſtantiarum a ſole.

[a] 84. Ob datas velocitatem in puncto P, poſitionem tangentis PY, et vis centripetæ quantitatem abſolutam, dantur QT et QR, ideoque $\frac{QT^2}{QR}$, ceu latus rectum. Sumatur PE æqualis dimidio lateris recti; et ex punctis P et E erigantur PK, EK perpendiculares ipſis PY, PS, quæ occurrant in K; erit punctum K in axe ſectionis, (Ham. ſect. con. L. ii. P. xxvii.) et proinde linea SK poſitio axis: ducatur jam PF, ita ut angulus FPy ſit æqualis TAB. VI. FIG. 56.

SECTIO TERTIA.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta ſit reciproce in duplicata ratione diſtantiæ locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicata ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.

TAB. VII. FIG. 57. Nam (per prop. XIII. XIV. XV.) latus rectum L æquale eſt quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P et Q. Sed linea minima QR dato tempore, eſt ut vis centripeta generans, hoc eſt

lis angulo SPY; linea SK utrinque producta vel occurret lineæ PF in loco quodam F, vel huic lineæ parallela erit, vel ei occurret ad alteram partem puncti S: in primo caſu orbita ellipſis eſt, cujus foci ſunt S et F; in ſecundo, parabola; in tertio hyperbola: hæ vero orbitæ, focis, axis poſitione, et latere recto principali datis, deſcribi poſſunt. Patet corpus quodvis in orbitis hoc modo conſtructis moveri poſſe, ſi vis centripeta ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ: et patet corpus hoc nullam aliam orbitam deſcribere poſſe, ex eadem ratiocinandi methodo, quâ uſi ſumus in nota (61.) ad hunc caſum applicatâ.

TAB. VI. FIG. 51. 85. PROB. Exeat corpus aliquod de loco dato P datâ cum velocitate ſecundùm datam poſitione rectam PY, et ſimul urgeatur à vi centripetâ tendente ad centrum datum S, quæ in loco quidem P innoteſcat, aliis vero in locis ſit reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab hoc centro. Quæritur ſectio conica quam motu ſuo deſcripturum eſt hoc corpus. Cum tangat recta ZPY figuram quæſitam in loco P, et cum detur poſitione recta SP per umbilicorum alterum S tranſiens, dabitur poſitione recta PH, quæ per alterum figuræ umbilicum H tranſibit, et cujus inventa longitudo ſolvet problema.

Sit igitur a ad b ut data velocitas in orbita, ad velocitatem quâ circulus deſcribitur in eâdem diſtantiâ, quæ etiam dabitur ex datis vi et diſtantiâ: atque his quidem datis dabitur et formâ et poſitione trajectoria quæſita: erit enim $2bb-aa : aa :: SP : PH$, inter quas ſemiaxis tranſverſus medius eſt arithmeticus; et ſi in tangentem ZPY demittantur perpendiculares SY, HZ, erit etiam $2bb-aa : aa :: SY : HZ$, inter quas ſemiaxis conjugatus medius eſt geometricus. DEM. Eſto enim umbilicus alter H, quæcunque tandem fuerit longitudo PH; et cum ſectiones omnes conicæ ad ellipſin referri poſſunt, ponamus ſectionem quæſitam ellipticam eſſe; et quadratum ſemiaxis conjugati æquale erit et rectangulo $\overline{SP+PH} \times \frac{L}{4}$, et rectangulo SY

$\times HZ$

eſt (per hypotheſin) reciproce ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ eſt ut $QTq \times SPq$, hoc eſt, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. Q. E. D.

Corol. Hinc ellipſeos area tota, eique proportionale rectangulum ſub axibus eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione lateris recti, et ratione temporis periodici. Namque area tota eſt ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore deſcribitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quod tempora periodica in ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicata majorum axium.

Namque axis minor eſt medius proportionalis inter axem majorem et latus rectum, atque ideo rectangulum ſub axibus eſt in ratione

$\times HZ$ (Ham. L. ii. P. xxi.) ergo $\overline{SP + PH} \times \frac{L}{4} = SY \times HZ$: ſed ob ſimilia triangula SPY, HPZ, erit $HZ = SY \times \frac{PH}{SP}$, et $SY \times HZ = SY^2 \times \frac{PH}{SP}$; quare eſt $\overline{SP + PH} \times \frac{L}{4} = SY^2 \times \frac{PH}{SP}$; quare $\overline{SP + PH} \times \frac{SP}{PH} = \frac{4SY^2}{L}$. Sed velocitas in omni orbitâ ad altitudinem quamvis SP eſt in ſubduplicatâ ratione $\frac{QT^2 \times SP^2}{SY^2}$ (18), et in conicâ ſectione $L = \frac{QT^2}{QR}$; et præterea QR dato tempore eſt ut $\frac{1}{SP^2}$, unde fit L proportionale $QT^2 \times SP^2$, quo ſubſtituto eſt velocitas in conica ſectione reciproce in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{SY^2}{L}$, vel $\frac{4SY^2}{L}$: ergo eadem velocitas eſt etiam reciprocè in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\overline{SP + PH} \times \frac{SP}{PH}$. Ergo velocitas corporis in circulo revolventis ad altitudinem primam SP eſt ad velocitatem corporis e loco ſuo primo P exeuntis, in ſubduplicatâ ratione $\overline{SP + PH} \times \frac{SP}{PH}$ ad

SECTIO TERTIA.

tione composita ex subduplicata ratione lateris recti et sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XVI.) est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti et ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, et manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. E. D. ([b]).

Corol.

$SP + SP \times \frac{SP}{SP}$, vel in subduplicatâ ratione $SP + PH$ ad $2PH$. Est ergo b^2 ad a^2 ut $SP + PH$ ad $2PH$; $2b^2$ ad a^2 ut $2SP + 2PH$ ad $2PH$; vel ut $SP + PH$ ad PH, et dividendo $2b^2 - a^2$ ad a^2 ut SP ad PH vel ut SY ad HZ. Q. E. D.

86. *Cor.* 1. Orbita descripta ellipsis erit, vel parabola, vel hyperbola, prout quantitas a^2 minor fuerit, vel æqualis, vel major quam $2b^2$.

87. *Cor.* 2. Si parabola sit, erit hujus latus rectum $\frac{4SY^2}{SP}$ per Lem. XII. et etiam ex solutione hujus problematis; et axis per S transiens erit recta ipsi PH parallela.

88. *Cor.* 3. Si ellipsis sit vel hyperbola, erit ellipseos semiaxis $SP \times \frac{b^2}{2b^2 - a^2}$, et semiaxis hyperbolæ $SP \times \frac{b^2}{a^2 - 2b^2}$. Porro semiaxis conjugatus in casu priore erit $SY \times \sqrt{\frac{a^2}{2b^2 - a^2}}$, in posteriore $SY \times \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - 2b^2}}$.

89. *Cor.* 4. Itaque si detur velocitas, et vis centripeta ad altitudinem quamvis SP, idem erit axis transversus quicunque fuerit angulus SPY ad eandem altitudinem; et axis conjugatus erit ut sinus anguli istius SPY.

[b] 90. Contra, posito quod tempora periodica in ellipsibus diversis circa centrum idem descriptis varientur in ratione sesquiplicatâ mediocrium distantiarum, erunt vires in mediis illis distantiis ut distantiarum quadrata inversè. Sit enim A semiaxis major, M semiaxis minor, et P tempus periodicum, erit ex hypothesi P ut $A^{\frac{3}{2}}$; quoniam vero tempora periodica sunt in ratione arearum totarum directè, et arearum datis temporibus descriptarum inversè, erit in ellipsi P vel $A^{\frac{3}{2}}$ ut $\frac{A \times M}{QT \times SP}$, unde est $QT \times SP$ ut $\frac{M}{A^{\frac{1}{2}}}$, vel $QT^2 \times SP^2$ ut $\frac{M^2}{A}$, quæ est ut L, vel ut $\frac{QT^2}{QR}$; unde est QR, vel ei proportionalis vis centripeta, inversè ut distantiæ mediocris quadratum.

91. Hinc sequitur, concessâ rationum harmoniâ quam invenit Keplerus inter temporum periodicorum quadrata et mediarum distantiarum cubos, quod vires

Corol. Sunt igitur tempora periodica in ellipſibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipſeon. SECTIO TERTIA.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA X.

Iiſdem poſitis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſita ex ratione perpendiculorum inverſe, et ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, et velocitas corporis P erit reciproce in ſubduplicata ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa eſt ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula deſcriptus, hoc eſt (per lem. VII.) ut tangens PR, id eſt, ob proportionales PR ad QT et SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, ſive ut SY reciproce et $SP \times QT$ directe; eſtque $SP \times QT$ ut area dato tempore deſcripta, id eſt (per prop. XVI.) in ſubduplicata ratione lateris recti. Q. E. D. ‡ TAB. VII. FIG. 57.

Corol. 1. Latera recta principalia ſunt in ratione compoſita ex duplicata ratione perpendiculorum, et duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in maximis et minimis ab umbilico communi diſtantiis, ſunt in ratione compoſita ex ratione diſtantiarum

vires acceleratrices, quibus planetæ omnes primarii in ſolem urgentur, ſunt inter ſe inversè ut mediarum illarum diſtantiarum quadrata.

92. Hinc etiam, ſi ex obſervationibus aſtronomicis diametri orbitarum quas cometæ deſcribunt, accurate determinari poſſint, tempora reditûs definire liceret; et vice versâ, temporibus revolutionum conceſſis, axes illorum majores, maximæque a ſole vel tellure excurrentium diſtantiæ, calculo ſimpliciſſimo inveniri poſſunt.

‡ Patet etiam e demonſtratione problematis (85).

SECTIO TERTIA

diſtantiarum inverſe, et ſubduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in conica ſectione, in maxima vel minima ab umbilico diſtantia, eſt ad velocitatem in circulo in eadem a centro diſtantia in ſubduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, et hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias et latera recta. Componatur hæc ratio inverſe cum ſubduplicata ratione laterum rectorum directe, et fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſe ([c]).

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciproce ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem ([d]).

Corol. 6. In parabola velocitas eſt reciproce in ſubduplicata ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi magis variatur, in hyperbola minus quam in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XII.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem parabolæ eſt in ſubduplicata ratione diſtantiæ. In hyperbola perpendiculum minus variatur, in ellipſi magis.‡

Corol. 7.

TAB. VI. FIG. 51.

([c]) 93. Patet (per 85). velocitatem in ſectione conicâ eſſe ſemper ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam, in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ PH ab altero foco, ad ſemiaxem majorem, eſt enim $a^2 : b^2 :: 2PH : SP + PH :: PH : \frac{SP + PH}{2}$: in mediâ vero diſtantiâ eſt PH æqualis ſemiaxi majori.

94. Hinc ſequitur, ſi vires quibus planetæ in ſolem urgentur ſint inverſe ut diſtantiarum quadrata, quod eorundem velocitates forent in ratione diſtantiarum mediocrium ſubduplicatâ inversè; quod ab aſtronomorum obſervationibus comprobatum invenimus.

([d]) 95. Ob motum in ellipticâ orbitâ confectum patet tellurem velocius ferri tempore brumali, quàm tempore æſtivo: tempore enim brumali tellus in perihelio verſatur.

‡ Ham. Con. Sec. L. II. P. xxxi. Cor. II.

Corol. 7. In parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro diſtantiam in ſubduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in ellipſi minor eſt, in hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, et per corollaria ſexta hujus et propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis ([e]). Hinc etiam in parabola velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbola major ([f]).

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quavis conica eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantia dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Cor. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem diſtantia, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem et ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum ([g]).

([e]) 96. Nam in parabolâ *PH* æqualis eſt axi majori: in ellipſi ſemper minor eſt: in hyperbolâ major. Unde in parabolâ eſt *PH* ad ſemiaxem majorem ut 2 ad 1; in ellipſi minor, in hyperbolâ major quàm in hâc ratione: et velocitas eſt ad velocitatem in circulo in ratione hujus ſubduplicatâ.

([f]) 97. Velocitas in parabolâ eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam ut $\sqrt{2}$ ad 1, velocitas in hoc circulo eſt ad velocitatem in circulo ad dimidiam diſtantiam ut 1 ad $\sqrt{2}$, componendo igitur has rationes, velocitas in parabolâ æqualis erit velocitati in circulo ad dimidiam diſtantiam: in ellipſi autem minor eſt, et in hyperbolâ major, ex eo quod ratio velocitatis in ellipſi ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam minor eſt quàm $\sqrt{2}$ ad 1, in hyperbolâ major.

([g]) 98. Conſequitur etiam ex ipſâ propoſitione: eſt enim velocitas in conicâ ſectione ad velocitatem in circulo ut $\frac{\sqrt{L}}{SY}$ ad $\frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, vel ut $\sqrt{\frac{L \times SP}{2}}$

ad

SECTIO TERTIA. ad SY, hoc eſt ut media proportionalis inter $\frac{L}{2}$ et SP, ad perpendiculum SY.

99. Omnia hæc corollaria ſequuntur etiam ex eo, quod velocitas in omni orbitâ eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam in ſubduplicata ratione chordæ curvaturæ per centrum virium tranſeuntis ad duplam diſtantiam.

100. In ellipſi velocitas V in puncto quovis P eſt ad velocitatem v in mediâ diſtantiâ B, in ſubduplicatâ ratione PH diſtantiæ ab altero foco, ad PS diſtantiam a centro virium. Eſt enim $V^2 : v^2 :: CB^2 : SY^2 :: SY \times HZ : SY^2$ (Ex Con. Ham. L. ii. P. xxi.) $:: HZ : SY :: HP : SP$.

TAB. VII. FIG. 57. 101. Velocitates angulares corporum, in orbitis quibuſvis circa centrum commune revolventium, ſunt inter ſe ut areæ datis temporibus deſcriptæ directè, et ut quadrata diſtantiarum inversè. Nam ſi linea perpendicularis QT adeo parva eſſe ſupponatur, ut pro arcu circuli haberi poſſit, erit angulus QSP ut $\frac{QT}{PS}$; eſt autem QT directè ut area trianguli SPQ, et inversè ut altitudo SP, unde angulus QSP eſt ut area illa directè et ut SP^2 inversè.

102. In conicis ſectionibus angulares velocitates ſunt in ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè, et in duplicata ratione diſtantiarum inversè: ſunt enim latera recta principalia in duplicatâ ratione arearum datis temporibus deſcriptarum.

103. Ex his conſequuntur omnia illa quæ in ſeptimâ ſectione Newtonus demonſtravit de corporum aſcenſu et deſcenſu rectilineo, poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ a centro virium: Nam eadem omnia, quæ jam demonſtrata ſunt de velocitatibus et temporibus periodicis in conicis ſectionibus, obtinebunt, ſive latitudo orbitæ deſcriptæ major ſit, ſive minor, ſive nulla: et diminuendo latus rectum principale in infinitum, manente axe majori, perimeter ſectionis cum axe, et foci cum axis verticibus ultimo coincidunt. Recta vero in quâ movetur corpus uſurpanda eſt pro ellipſi evaneſcentis latitudinis, ſi velocitas in rectâ illâ ſit ad velocitatem quâ circulus deſcribitur ad eandem diſtantiam in ratione minori quam $\sqrt{2}$ ad 1; pro hyperbolâ autem, ſi in ratione majori; et pro parabolâ, ſi in eâ ipſa ratione.

TAB. VI. FIG. 51. 104. His poſitis, velocitas corporis de loco quovis b verſus centrum S recta deſcendentis, ad altitudinem quamvis SP erit ad velocitatem corporis intervallo SP circulum deſcribentis in ſubduplicatâ ratione bP ad $\frac{1}{2}$ Sb. Nam velocitas in conicâ ſectione eſt ſemper ad velocitatem in circulo in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ ab altero foco, ad ſemiaxem majorem.

105. Sit $bP = \frac{Sb}{2}$, et erit velocitas acquiſita cadendo per bP æqualis velocitati in circulo. Unde ſi corpus illud ad diſtantiam æqualem $\frac{Sb}{2}$ in circulo revolvens, ſurſum projiciatur eâ cum velocitate quâ circulum deſcribit, aſcendet ad duplam ſuam a centro diſtantiam.

106. Hinc

106. Hinc ſequitur, quòd ſi corpus in ellipſi revolvens, ſurſum projiciatur eâ cum velocitate quâ ellipſin deſcribit, aſcendet ad diſtantiam a centro virium æqualem axi majori. Nam in mediâ diſtantiâ, in quâ velocitas æqualis eſt velocitati in circulo, aſcendet ad duplam a centro diſtantiam; et per Prop. xii. ad eandem ſemper altitudinem aſcendet, ſi a quovis alio puncto orbitæ projiciatur. Idem ſequitur e Corollario 4to. Prob. (85.) nam ſi directio projectionis utcunque mutetur manente velocitate et vi centripetâ ad datam diſtantiam, idem erit axis tranſverſus figuræ, et axis conjugatus erit ut ſinus anguli SPY: evaneſcente hoc ſinu, projiciatur corpus recta a centro, et aſcendet corpus in perimetro ſectionis conicæ evaneſcentis cujus axis tranſverſus idem manet ac prius; hoc eſt recta per quam aſcendit corpus æqualis eſt axi tranſverſo ſectionis. SECTIO TERTIA.

107. Si velocitas projectionis ea ſit quâ parabola deſcribitur, aſcendet corpus in infinitum, neque unquam redibit.

108. Si velocitas projectionis ea ſit, quæ ſufficeret ad deſcribendam hyperbolam, corpus non modo aſcendet ad altitudinem infinitam, ſed et motus ſui partem aliquam etiam tum retinebit: et velocitas ultima ad altitudinem infinitam erit ad velocitatem in loco quovis P ad finitam altitudinem, ut perpendiculum SY, demiſſum a centro S in tangentem PY, ad perpendiculum demiſſum a centro S in aſymptotum. TAB. VI. FIG. 53.

109. Corporis de loco dato h e quiete cadentis tempus totius deſcenſus ad centrum S dimidium eſt temporis periodici corporis in circulo revolventis ad diſtantiam æqualem $\frac{1}{2}\,Sh$. Corpus enim, rectà deſcendens de loco h ad centrum S, deſcribit ſemiperimetrum ellipſeos latitudinis evaneſcentis, et tempus deſcenſus dimidium erit temporis periodici in ellipſi, cujus axis tranſverſus eſt Sh.

110. Hinc ſi orbitas planetarum circulares eſſe ſupponamus, ex datis temporibus periodicis inveniri poſſunt tempora, quibus ad centrum motûs ſui deſcenderent, ſi motu omni revolutionis ſublato, ſolâ vi centripetâ urgerentur. Nam tempus periodicum corporis circulum deſcribentis ad diſtantiam Sh eſt ad tempus periodicum corporis circulum deſcribentis ad diſtantiam $\frac{1}{2}\,Sh$ in ſeſquiplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem, vel ut $2^{\frac{3}{2}}$ ad 1, vel ut $2 \times \sqrt{2}$ ad 1; unde eſt tempus primum, ad dimidium temporis periodici in circulo ad diſtantiam $\frac{1}{2}\,Sh$, vel ad tempus rectilinei deſcenſus uſque ad centrum, ut $4 \times \sqrt{2}$ ad 1. Exempli gratia cum tempus periodicum terræ ſit dierum 365, 2565, et ſit $4 \times \sqrt{2} : 1 :: 365,\,2565 : 64,\,5699$, tellus noſtra ſpatio dierum 64, 5699 recta ad ſolem caderet. Et ex ſimili ratiocinio patet quod

		die :	hor :
Mercurius	in ſolem caderet ſpatio circiter	15 :	13
Venus		39 :	17
Mars		121 :	11
Jupiter		767 :	3
Saturnus		1900 :	4

Planetarum

Sectio Tertia.

Planetarum circumjovialium.

		die : hor :
Intimus	in Jovem caderet ſpatio circiter	0 : 7
Secundus		0 : 15
Tertius		1 : 6
Quartus		2 : 23

Planetarum circumſaturniorum.

Intimus	in Saturnum caderet ſpatio circiter	0 : 8
Secundus		0 : 12
Tertius		0 : 19
Quartus		2 : 20
Quintus		14 : 21

Luna in terram caderet ſpatio circiter 4 : 20

Scholium.

Ope horum corollariorum explicare licet alternum aſcenſum et deſcenſum planetæ in orbitâ ſuâ. Abundè quidem a præcedentibus conſtat, corpus juſtâ velocitate projectum, ſimulque vi centripetâ in inverſâ duplicatâ ratione diſtantiæ variante agitatum, deſcribere poſſe orbitam ellipticam focum in centro illo habentem. Quoniam vero huic motui nihil ſimile in corporibus terreſtribus obſervare licet, ob vim projectilem prorſus contemnendam reſpectu ad vim gravitatis in lineis parallelis agentem, quæ citiſſime detrahit corpora omnia in vicinio telluris projecta, permulti profitentur ſe non concipere poſſe, quâ ratione corpus, cum ſemel ad virium centrum deſcendere cœpit, ob eodem iterum aſcendere poteſt. Etenim aiunt, ſi deſcenſus a vi præpollenti gravitatis oriatur, quòd magis rationi et experientiæ quotidianæ foret conſentaneum, ut propter auctam perpetuo vim gravitatis, diſtantiâ diminutâ, corpus ad minores perpetuò diſtantias deſcenderet, donec tandem ad centrum ipſum appellat. Hinc ſane mirantur planetas, cum ſemel a ſole recedere cœpiſſent, iterum quaſi mutato conſilio ad ſolem reverti : cometaſque in rapido ſuo ad ſolem deſcenſu, quando ipſam ſolis ſuperficiem tetigiſſe videntur, quaſi metu percitos in infinitum abire.

Huic vero objectioni facilis eſt reſponſio. Concedimus nimirum hæc omnia accidere debere ſi corpora hæcce in rectis lineis moveantur : contendimus autem corpora omnia in gyros acta vi centrifugâ gaudere ; et hanc vim centrifugam tam celeriter ſæpiſſimè augeri, ut corpora jamjam ad centra ipſa deſcenſura, quaſi repellere potis ſit. Hæc vero paulo accuratius conſideranda ſunt.

Tab. VII. Fig. 58.

Fingamus corpus motu uniformi in lineâ AP, quæ perpendicularis ducitur lineæ AS, moveri ; deſcribatur circulus radio SA, patet hoc corpus cum ad P perventum eſt a centro receſſiſſe ſpatio RP. Sit linea AP quam minima in tempuſculo quodam deſcripta, et vis quâ corpus recedere conatur in puncto A repre-

TAB. VI.

Fig. 51.

Fig. 52

Fig. 53

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56

repreſentabitur per lineam RP: æqualis huic vi ponatur vis centripeta, et corpus hiſce viribus in peripheriâ circuli ſemper retinebitur. Patet ob vim centrifugam vi centripetæ æqualem, corpus ſemper eandem a centro diſtantiam ſervare, vel, quod idem eſt, circulum deſcribere.

Vires autem centripetas atque centrifugas, in circulis ſemper æquales, in eadem ratione ad diverſas diſtantias variari neceſſe eſt ut circuli revera deſcribantur; hoc eſt (per Corol. i. Prop. IV.) in ratione duplicatâ velocitatis directè, et in ſimplici ratione radiorum inverſè; et proinde, datis vi centripetâ et diſtantiâ, inveniri poteſt certa illa et invariabilis velocitas quæ neceſſaria eſt ad corpus in circulo retinendum (34).

Si velocitas igitur corporis projecti, diſtantiâ eâdem manente, minor ſit hâc velocitate circulari, conſpicuum eſt, corpus arcum arcui circulari interiorem deſcribere debere, hoc eſt, ad minorem diſtantiam deſcendere. Si, velocitate et vi iiſdem manentibus, augeatur diſtantia, ex eo quod hæc velocitas minor eſt velocitate quæ requiritur ad corpus in circulo retinendum, corpus iterum arcum quendam arcui circulari interiorem deſcriberet. Eâdem methodo ſequitur, ſi augeretur velocitas, vel minueretur diſtantia, vi centripetâ eadem manente, corpus arcum arcui circulari exteriorem deſcribere; vel quod idem eſt, a centro recedere. Et proinde ex his concludere licet, ſi vis centrifuga ſit æqualis vi centripetæ, corpus in lineâ perpendiculariter ductâ ad diſtantiam projectum, in peripheriâ circuli ſemper retineri; ſi major ſit, a centro recedere; ſi minor, ad centrum accedere debere.

His præmiſſis, perpetuam illam oſcillationem corporis inter apſides orbitæ nullo fere negotio explicare licet, vel poſito quod motus perficiatur in orbitâ ellipticâ circa focum ſecundum hypotheſes in Prop. XIII. ex motus illius naturâ, et ex indole figuræ in quâ perficitur motus, luculenter oſtendere, hunc motum a vi projectili et vi gravitatis in inverſa duplicatâ ratione diſtantiæ variantis oriri poſſe. Fingamus corpus vi projectili et vi gravitatis agitatum circulum deſcribere ad diſtantiam maximam ellipſis, poſito centro virium in umbilico figuræ, et corpus aliud circa idem virium centrum areas temporibus proportionales in ellipſi illâ ex quâcunque demum cauſâ deſcribere. Aberratio corporis projecti a tangente eadem fieri poteſt quæ in eodem tempuſculo in orbita elliptica conficitur, ſi vel augeatur vis gravitatis vel diminuatur vis projectilis. Diminuatur velocitas corporis projecti, donec velocitati corporis alterius in vertice figuræ ellipticæ tandem fiat æqualis; ob legem gravitatis, areaſque a corporibus utriſque deſcriptas æquales, eadem erit utriuſque ſemita, (61) eademque velocitatis variatio. Quoniam vero velocitas in orbitâ ellipticâ creſcit in majori quàm inverſâ ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; hoc eſt, in majori ratione quam variantur velocitates corporum circulos deſcribentium ad eaſdem diſtantias: velocitas corporis projecti perpetuo ad velocitatem corporis in circulo appropinquabit; quandoque ſemel ad diſtantiam a centro æqualem diſtantiæ mediæ corporis in ellipticâ orbitâ revolventis pervenerit, velocitas ejus velocitati in circulo erit æqualis per Cor. 4. Prop. XVIII. Quæret forſan quiſpiam utrum corpus hoc vi projectili et vi gravitatis agitatum, poſtquam ad hanc diſtantiam pervenerit, in circulo jam ferretur vel in orbitâ ellipticâ moveri

SECTIO TERTIA. perſeveraret. Reſponſio facilis eſt ; perpendenti enim facillime innoteſcit, corpus ob angulum projectionis in hoc loco recto minorem propius ad centrum deſcendere, et ob cauſas prædictas in ellipſi etiamnum retineri : nec ullus conceditur dubitandi locus, utrum ab hâc orbita deflecteret, donec ad diſtantiam minimam perveniat. Poſtquam vero corpus ad diſtantiam æqualem diſtantiæ minimæ in orbitâ ellipticâ pervenerit, velocitas ejus major eſt velocitate quæ requiritur ad corpus in circulo retinendum ; ex eo quod ex naturâ ellipſeos, velocitates corporis ex mediâ ad minimam diſtantiam tranſeuntis celerius creſcunt quam velocitates quæ requiruntur ad corpora in circulis retinenda ad eaſdem diſtantias, modo vires centripetæ ſint diſtantiarum quadratis inverſè proportionales. Patet igitur corpus projectum lineam circulo exteriorem deſcribere. Simili argumento concluditur quod velocitatibus et viribus jam decreſcentibus iiſdem quibus modo creſcebant gradibus, corpus in aſcenſu ſuo in ſemiellipſi ſimili et æquali ei quam in deſcenſu deſcripſerat ferretur et ad diſtantiam priorem rediret, ſicque inter apſides ſuas, ſi non obſtaret medii reſiſtentia, in æternum oſcillaretur.

SECTIO IV.

De corporum ſphæricorum viribus attractivis.

PROOEMIUM.

SECTIO QUARTA. Ex præcedentibus abunde conſtat gravitationis principium a terræ ſuperficie uſque ad lunam extendi, a primario unoquoque ad ſatellites ſuos, et a centro ſolis ad omnes planetas, cum primarios tum ſecundarios ; et per legem motus tertiam conſequitur hoſce omnes viciſſim in ſolem gravitare : præterea vis, quâcum urgentur, legem determinatam in diverſis diſtantiis obſervat, rationem nempe diſtantiarum a centro duplicatam inverſam.

Priuſquam vero ſyſtema mundanum penitus explicari poſſit planetarumque ſingulorum materiæ quantitates ut et denſitates vireſque gravitationis inveniri ; neceſſe eſt ut pauca quædam de univerſalitate aliiſque hujuſce principii proprietatibus præmittantur. Progredimur igitur oſtenſuri in primo loco vim gravitationum vel motum ab eâ generatum in æqualibus a corpore centrali diſtantiis proportionalem eſſe quantitati materiæ in corpore attracto. Experimentis accuratiſſimè factis invenit Newtonus corpora funependula ejuſdem figuræ atque magnitudinis, diverſæ vero denſitatis aut conſtitutionis internæ, oſcillationes ſuas in temporibus æqualibus peragere, poſitâ nimirum eadem fili longitudine eademque aëris reſiſtentiâ. Et exinde concludit vires motrices vel gravitantes variari in ratione quantitatis materiæ in corpore attracto*. Natura autem gravitatis in planetas eadem eſt atque in terram. Elevari igitur fingantur

* THEOREMA. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum a centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex*

tur corpora terreſtria ad uſque orbem lunæ, unàque cum lunâ motu omni privata demitti, et quoniam in temporibus æqualibus ſpatia æqualia cum lunâ cadendo deſcriberent, quantitates materiæ in iiſdem ſunt ad quantitatem materiæ in lunâ ut pondera eorum ad ipſius pondus. Similiter ſatellites Jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum a Jovis centro; ideoque gravitates eorum acceleratrices ſunt in diverſis a Jovis centro diſtantiis reciproce ut quadrata diſtantiarum, in diſtantiis vero æqualibus æquales: quare corpora quælibet temporibus æqualibus ab altitudinibus æqualibus cadendo ſpatia æqualia deſcriberent perinde ut fit gravibus in terram. — Eodem argumento planetæ circumſolares ab æqualibus a ſole diſtantiis demiſſi deſcenſu ſuo in ſolem ſpatia æqualia in temporibus æqualibus deſcriberent. Pondera igitur eorum ſunt etiam ut quantitates materiæ in ipſis.

Hactenus probavimus vires, quibus corpora diverſa vel planetæ diverſi attrahuntur ab eodem corpore centrali eſſe datis diſtantiis ut quantitates materiæ in corporibus attractis, reſtat probandum vires planetarum diverſorum in æqualia corpora datis diſtantiis exercitas eſſe in ratione quantitatis materiæ in corpore trahente. Cum autem jam antea demonſtratur gravitatem in quemlibet planetam ſeorſim conſideratum eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ a planetæ iſtius centro patet veritas hujuſce poſitionis ex Newtoni Prop. LXIX. et Cor. ſuis. †

Quoniam vero gravitatio corpora omnia pervadere intelligitur nec variatur ob diverſam ſuperficiei texturam eſtque ſemper in ratione quantitatis materiæ, oritur

ex ratione ponderum et ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.

Dem. Nam velocitas, quam data vis in datâ materia, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis et tempus directè, et materia inverſè. Quo major eſt vis, vel majus tempus, vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem ſecundam manifeſtum eſt. Jam vero ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, et arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora deſcribunt ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correſpondentibus oſcillationum partibus, ut vires motrices et tota oſcillationum tempora directè, et quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires et oſcillationum tempora directè, et velocitates reciprocè. Sed velocitates reciprocè ſunt ut tempora; atque ideo tempora directè et velocitates reciprocè ſunt ut quadrata temporum; et propterea quantitates materiæ ſunt ut vires motrices, et quadrata temporum, id eſt, ut pondera et quadrata temporum. Q. E. D.

Cor. Ideoque ſi tempora ſint æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

† THEOREMA. *In ſyſtemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. ſi corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum a trahente*; *et corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D,

SECTIO QUARTA.

oritur gravitatio totius ex gravitatione partium. Exempli gratiâ, pondus montis oritur ex gravitatione partium montis ad tellurem et ex summâ gravitationum componitur; et similiter gravitatio telluris ad montem ex summâ gravitationum partium telluris ad montem conficitur; extenditur igitur gravitatio pro ratione quantitatis materiæ solidæ ad unamquamque materiæ particulam, legesque quibuscum particulæ componentes se invicem trahunt, datis legibus quibuscum sphæræ ex his particulis conflatæ sese attrahunt, jam sunt explorandæ.

PRO-

A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

DEM. Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; et similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; et ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ sunt ut vires acceleratrices et corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Cor. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XI.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur. SECTIO QUARTA.

Sit *HIKL* superficies illa sphærica, et *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; et, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.] similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; et superficiei sphæricæ particulæ quævis ad *HI* et *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe, et quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. Q.E.D. TAB. VII. FIG. 59.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XII.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ, vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, et *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ TAB. VII. FIG. 60.

PHK,

Sectio Quarta.

PHK, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* et *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* ſecent *PL*, *pl* in *F* et *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evaneſcant anguli *DPE*, *dpe*: et ob æquales *DS* et *ds*, *ES* et *es*, lineæ *PE*, *PF* et *pe*, *pf* et lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, et *pf* ad *pi* ut *df* vel *DF* ad *ri*; et ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc eſt (per corol. 3. lem. VII.) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rurſus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, et *ps* ad *pi* ut *se* vel *SE* ad *iq*; et ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus *PI quad.* $\times pf \times ps$ ad *pi quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus *IH* convolutione ſemicirculi *AKB* circa diametrum *AB* deſcribet, ad ſuperficiem circularem quam arcus *ih* convolutione ſemicirculi *akb* circa diametrum *ab* deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula *P* et *p*, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directe, et quadrata diſtantiarum ſuperficierum a corporibus inverſe, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas, quæ (facta per legum corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, et *pi* ad *pq*; id eſt (ob ſimilia triangula *PIQ* et *PSF*, *piq* et *psf*) ut *PS* ad *PF* et *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus *P* verſus *S* ad attractionem corpuſculi *p* verſus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc eſt, ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum *KL*, *kl* deſcriptæ trahunt corpuſcula, erunt ut *ps quad.* ad *PS quad.* inque eadem ratione erunt vires ſuperficierum omnium circularium in quas utraque ſuperficies ſphærica, capiendo ſemper *sd* æqualem *SD* et *se* æqualem *SE*, diſtingui poteſt. Et per compoſitionem, vires totarum ſuperficierum ſphæricarum in corpuſcula exercitæ erunt in eadem ratione. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Sectio Quarta.

Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; ac detur tum ſphæræ denſitas, tum ratio diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi a centro ejus: dico quod vis, qua corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiametro ſphæræ.

Nam concipe corpuſcula duo ſeorſim a ſphæris duabus attrahi, unum ab una et alterum ab altera, et diſtantias eorum a ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpective, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles et ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſita ex ratione particularum directe et ratione duplicata diſtantiarum inverſe ([h]). Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicata diametrorum, et diſtantiæ ſunt ut diametri; et ratio prior directe una cum ratione poſteriore bis inverſe eſt ratio diametri ad diametrum, Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ a centris ſphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice verſa, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3.

([h]) 111. Corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem, cujus puncta ſingula vi tali centripetâ urgentur conſtitutum, attrahitur ad centrum vi quadrato diſtantiæ ab eodem centro proportionali per prop. ultimam; concipe igitur ſphæras haſce duas ex ſuperficiebus ſphæricis et concentricis conflatas et patet veritas poſitionis.

SECTIO QUARTA. *Corol.* 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium et æqualiter denſorum, puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; vires, quibus corpuſcula, ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum ([i]).

([i]) 112. Vires quibus corpuſcula ad ſimilia et homogenea quævis ſolida ſimiliter poſita attrahuntur, ſunt ut diſtantiæ corpuſculorum a punctis quibuſvis ſimiliter poſitis, vel ut ſolidorum latera quævis homologa; poſito quòd ad ſolidorum puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum a punctis.

TAB. VII. FIG. 61. DEM. Reſolvi concipiantur ſimilia ſolida in ſimiles conos $PKLP$, $PHIP$; vel in ſimilia conorum fruſta quorum vertices ſunt in corpuſculo P; et ſint baſes eorum KL, HI ſuperficies ſphæricæ quarum centra ſunt in P: erunt vires ſimilium et concentricarum quarumvis ſuperficierum KL, MN in corpuſculum P exercitæ inter ſe æquales; ſunt enim ut ſuperficies illæ directè, et quadrata diſtantiarum inversè; vel ut PK^2 ad PM^2 directè, et PK^2 ad PM^2 inversè; quæ rationes componunt rationem æqualitatis. Totæ igitur vires ſimilium ſolidorum $PKLP$, $PHIP$ erunt ut vis illa data ſuperficiei cujuſvis MN, et ut numerus ſuperficierum, ex quibus ſolida ultimò conſtant, vel ut PK ad PH. Patet etiam attractionem fruſti cujuſvis $MKLN$ eſſe ut MK. Et idem obtinet in ſimilibus quibuſvis ſolidis, quæ ex ſimilibus conis, vel ſimilibus conorum fruſtis, ultimò componi intelliguntur.

113. *Cor.* Sit PH æqualis HK, erit vis quâ corpuſculum P verſus conum $PHIP$ attrahitur, æqualis vi verſus fruſtum $HKLI$. Unde patet, quod ſi vires particularum, ex quibus corpus trahens componitur, decreſcant in receſſu corpuſculi attracti in duplicatâ ratione diſtantiarum, attractio non multò fortior erit in contactu, quàm cum attrahens et attractum parvo intervallo ſeparantur ab invicem.

TAB. VII. FIG. 62. 114. Iiſdem poſitis corpuſculum intra ſolidum genitum ex revolutione annularis ſpatii a duabus ſimilibus et concentricis ellipſibus $HIKL$, $hikl$ terminati, nullam in partem attrahitur.

DEM. Sit enim P corpuſculum intra ſolidum conſtitutum, et IPL recta per P tranſiens, et occurrens externæ ſuperficiei in punctis I, L; internæ vero in i, l: intelligatur linea IL bifariam ſecari in z, et ob ſimiles ſimiliterque poſitas figuras il bifariam etiam ſecetur in z, et proinde eſt Ii æqualis Ll. Vires autem quibus corpuſculum P attrahitur ad oppoſita ſolidi fruſta $IihH$, $KklL$, quæ inter eaſdem rectas lineas IPL, HPK per P tranſeuntes continentur, erunt (112) ut Ii ad Ll, hoc eſt in ratione æqualitatis: et ſimili argumento attractiones omnes per totum ſolidum a contrariis attractionibus deſtruuntur.

PRO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XIV.

SECTIO QUARTA.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In ſphæra $ABCD$, centro S deſcripta, locetur corpuſculum P; et centro eodem S, intervallo SP, concipe ſphæram interiorem $PEQF$ deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. XIX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia $AEBF$ componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus P. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris $PEQF$. Et (per prop. XXI.) hæc eſt ut diſtantia PS (k). Q.E.D. TAB. VII. FIG. 63.

Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt pure mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimo conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur et craſſitudo minuitur

(k) 115. Poſitis quæ in fig. 62. vis, quâ corpuſculum p intra ſpheroidem in ſemidiametro CQ conſtitutum ad totum ſolidum attrahitur, eſt ad vim corpuſculi Q in eadem ſemidiametro, ut diſtantia Cp ad CQ.

DEM. Centro enim C ſemidiametro Cp deſcribi concipiatur ſphærois interior $bipkl$ ipſi $HIQKL$ ſimilis; attractiones exterioris ſolidi annularis contrariis attractionibus deſtructæ, nihil agunt in corpuſculum p; vires autem quibus attrahuntur corpuſcula p, Q, verſus ſolida $bikl$, $HIKL$, ſunt ut lineæ quævis homologæ in his ſolidis (112), vel ut Cp ad CQ.

116. Si igitur ſphæra vel ſphærois hujuſmodi per centrum perforetur, corpora ex diverſis a centro ſphæræ diſtantiis in eodem tempore ad centrum pervenirent; et præterea, corpus per foramen tale libere decidens per centrum tranſiret, et in aſcenſu ſuo viribus iiſdem, a quibus deſcendens accelerabatur, retardatum, oſcillationes perageret more penduli in arcu cycloidis moti.

SECTIO QUARTA.

tur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies, et ſolida componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas, et attractiones corpuſculi a ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi a centro (per prop. XX.) Et componendo fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis a centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ. Nam (per prop. XXI.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illa ratione; et, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahatur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicata ratione diſtantiæ a particula (1).

PRO-

(1) 117. Hinc colligere licet particulas ex quibus conflantur corpora ſolis, telluris, planetarumque ſingulorum cum primariorum tum ſecundariorum, ſe invicem attrahere vi diſtantiarum ſuarum quadratis reciprocè proportionali. In propoſitionibus noviſſimis demonſtravit Newtonus ſphæras a particulis conflatas ſe invicem trahentibus in inverſá duplicatâ ratione diſtantiæ ſe invicem trahere

SECTIO QUARTA.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XVI.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum a punctis; dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ſuæ a centro ſphæræ trahentis, (per prop. XXIII.) et propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud a ſingulis ſphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per prop. XXIII.) reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ a centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eadem ratione. Q. E. D.

Corol. 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum a centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eadem vi, qua ab

here ſecundum legem eandem. Si igitur poſitâ hâc lege attractionis ſphærarum particulæ ipſæ ſe invicem non traherent ſecundum hanc legem fingatur quævis alia attractionis lex, et ratiocinia Newtoni uſurpando luculenter conſtabit quod particula extra ſuperficiem ſphæricam vel ſphæram conſtituta non attrahetur in inversâ duplicata ratione diſtantiæ. Quoniam igitur vires quibus attrahuntur particulæ in diverſis diſtantiis a ſole vel quolibet planetâ ſunt inter ſe inverſe ut diſtantiarum quadrata a corpore attrahente, patet a præcedentibus particulam unamquamque et in ſole et in unoquoque planeta vi propria attractionis gaudere ita ut unumquodque corpuſculum in ſyſtemate mundano alia quæcunque attrahat vi diſtantiarum quadrato reciproce proportionali.

Sectio Quarta.

ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent, ubi ſphæra attrahens locatur in umbilico, et corpora moventur extra ſphæram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XVII.

Si ſphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem et vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; et vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, qua hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Tab. VII. Fig. 64.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; et hæ (per prop. XXIV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, qua ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit

hit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*; erit in eadem ratione. Augeatur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; et, addita materia non attractiva, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; et vis, qua harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures, ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes et attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directe et quadrata diſtantiarum inter centra inverſe.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a ſphæræ utriuſque virtute attractiva mutuo exercita in ſphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione ſervata.

Corol. 6. Si hujuſmodi ſphæræ aliquæ circa alias quieſcentes revolvantur, ſingulæ circa ſingulas; ſintque diſtantiæ inter centra revolventium et quieſcentium proportionales quieſcentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et viciſſim, ſi tempora periodica ſunt æqualia; diſtantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicos conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent; ubi ſphæra attrahens, formæ et conditionis cujuſvis jam deſcriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9.

SECTIO QUARTA.

Corol. 9. Ut et ubi gyrantia ſunt etiam ſphæræ attrahentes, conditionis cujuſvis jam deſcriptæ ([m]).

PRO-

([m]) 118. Ope propoſitionum præcedentium inveniri et inter ſe comparari poſſunt pondera corporum in diverſos planetos. Pondera enim corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium ſunt (per Cor. 2. prop. IV.) ut diametri circulorum directè et quadrata temporum periodicorum inverſè; pondera autem ad ſuperficies planetarum aliaſve quaſvis a centro diſtantias majora ſunt vel minora (per hanc prop.) in duplicatâ ratione diſtantiarum inverſè. Computum ſic ineundo invenit Newtonus pondera æqualium corporum in ſolis, jovis, ſaturni, ac terræ ſuperficiebus eſſe ut 10000, 943, 529 et 435 reſpectivè.

119. *Cor.* 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in planetis ſingulis; Nam quantitates materiæ in planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris; id eſt in ſole, jove, ſaturno, ac terra ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, et $\frac{1}{169282}$, reſpectivè.

120. *Cor.* 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium et homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri per prop. XXI, ideoque ſpærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera illa ad ſphærarum diametros applicata. Denſitates ſolis, jovis, ſaturni, ac terræ, ſunt ut 100, 94 $\frac{1}{2}$, 67 et 400. Eſt igitur ſol paulo denſior quàm jupiter, et jupiter quam ſaturnus, et terra quadruplò denſior quam ſol.

121. *Cor.* 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed et denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propriores; ut jupiter ſaturno, et terra jove. In diverſis utique diſtantiis a ſole collocandi erant planetæ, ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra ſi terra locaretur in orbe ſaturni rigeſceret, ſi in orbe mercurii in vapores ſtatim abieret. Eſt enim lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, ſeptuplo denſior in orbe mercurii quam apud nos, et ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accomodetur, et propterea denſior ſit hâc noſtrâ, cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

122. *Cor.* 5. Gravitas pergendo a ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcit in ratione diſtantiarum a centro quam proxime. Si enim materia uniformis eſſet obtineret hæc proportio accuratè per prop. XXII. Error igitur tantus eſt quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XVIII.

Sectio Quarta.

Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis compoſita, qua ſphæræ duæ ſe mutuo trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.

Caſ. 1. Sit *AEBF* ſphæra; *S* centrum ejus; *P* corpuſculum attractum, *PASB* axis ſphæræ per centrum corpuſculi tranſiens; *EF*, *ef* plana duo, quibus ſphæra ſecatur, huic axi perpendicularia, et hinc inde æqualiter diſtantia a centro ſphæræ; *G*, *g* interſectiones planorum et axis; et *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpuſculum *P*, ſecundum lineam *PH* exercita, eſt ut diſtantia *PH*; et (per legum corol. 2.) ſecundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut diſtantia *PG* multiplicata per numerum punctorum, id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo *EF* et diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, qua corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam *Pg*, ſive ut huic æquale planum *EF* ductum in diſtantiam illam *Pg*; et ſumma virium plani utriuſque ut planum *EF* ductum in ſummam diſtantiarum $PG + Pg$, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri et corpuſculi diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut duplum planum *EF* ductum in diſtantiam *PS*, vel ut ſumma æqualium planorum $EF + ef$ ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphæra tota, hinc inde æqualiter a centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut ſphæra tota et ut diſtantia *PS* conjunctim. Q. E. D.

Tab. VII. Fig. 65.

Caſ. 2. Trahat jam corpuſculum *P* ſphæram *AEBF*. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua ſphæra illa trahitur, erit ut diſtantia *PS*. Q. E. D.

Caſ. 3.

SECTIO QUARTA.

Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris *P*; et quoniam vis, qua corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi a centro ſphæræ primæ et ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, qua corpuſcula omnia in ſphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, qua ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, et propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. Q. E. D.

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, et vis geminata proportionem priorem ſervabit. Q. E. D.

TAB. VII. FIG. 66.

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum *p* intra ſphæram *AEBF*; et quoniam vis plani *ef* in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo et diſtantia *pg*; et vis contraria plani *EF* ut ſolidum contentum ſub plano illo et diſtantia *pG*; erit vis ex utraque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in *pS* diſtantiam corpuſculi a centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium *EF*, *ef* in ſphæra tota, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, et ut *pS* diſtantia corpuſculi a centro ſphæræ. Q. E. D.

Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris *p* componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem *AEBF* ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum *pS*. Q. E. D.

PRO-

TAB: VII

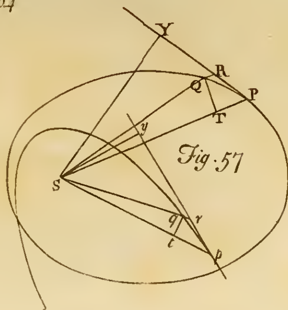


Fig. 57

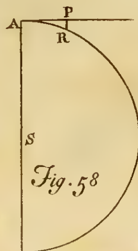


Fig. 58

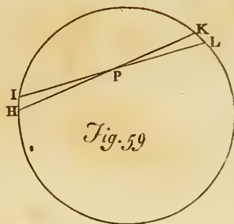
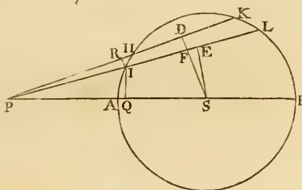


Fig. 59



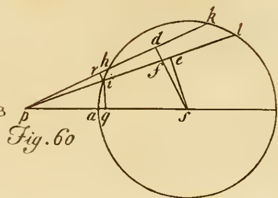


Fig. 60

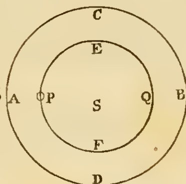


Fig. 63

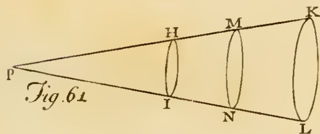


Fig. 61

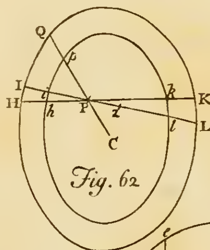


Fig. 62

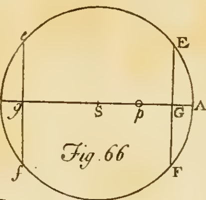
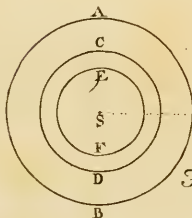


Fig. 66



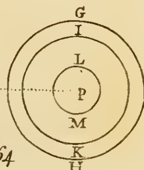


Fig. 64

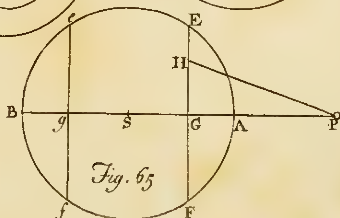


Fig. 65

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XIX.

SECTIO QUARTA.

Si ſphæræ in progreſſu a centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares et inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem a centro diſtantiam ſint undique ſimilares; et vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo, quo propoſitio XXV. ex propoſitione XXIV. demonſtrata fuit.

Corol. Quæ ſuperius de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, et attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Sectio Quinta.

SECTIO V.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Efficiendum est ut corpus in trajectoria quacunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quiescente.

Tab. VIII. Fig. 67.

In orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; et area, quam linea *Cp* describit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* simul describit, ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, (n) ideoque in data ratione, et propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, et linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, et corpus in *p* semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore describet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem et æqualem *VP* in figura quiescente *VPK* descri-

Tab. VIII. Fig. 68.

(n) 123. Si trianguli *ABC* duo latera *AB*, *AC* sint æqualia duobus lateribus *ab*, *ac* trianguli *abc*; erunt areæ triangulorum ut sinus angulorum intermediorum. Demissis enim perpendiculis *BD*, *bd*, areæ eorum sunt ut $AC \times BD$ ad $ac \times bd$, vel ut *BD* ad *bd*; id est, posito *AB* aut *ab* pro radio, ut sinus anguli *BAD* ad sinum anguli *bad*.

Si igitur sit angulus $VCp : VCP :: G : F$, et $VCq : VCQ :: G : F$, est *pCq* ad *PCQ* in eadem ratione. Sed $PC = pC$, et $QC = qC$; ergo area trianguli *pCq* est in statu nascenti ad aream trianguli *PCQ* ut *G* ad *F*, vel in eadem datâ ratione.

defcribere poteft. Quæratur igitur, per corollarium quintum propofitionis V, vis centripeta qua corpus revolvi poffit in curva illa linea quam punctum p defcribit in plano immobili, et folvetur problema. (°) Q. E. F.

SECTIO QUINTA.

PROPOSITIO XXIX. THEOREMA XX.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiefcente, et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri poffunt, eft in triplicata ratione communis altitudinis inverfe.

TAB. VIII. FIG. 69.

Partibus orbis quiefcentis VP, PK funto fimiles et æquales orbis revolventis partes up, pk; et punctorum P, K diftantia intelligatur effe quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculm kr, idemque produc ad m, ut fit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines PC et pC,

(°) 124. Fingatur corpus in trajectoriâ quâcunque revolvi vi tendente ad immobile punctum, areafque tempori proportionales defcribere; in hoc cafu angularis velocitas radii vectoris in inversâ duplicatâ ratione diftantiæ variabitur (101). Ut vero ea quæ fequuntur facilius concipiantur, ponamus femitam corporis VPK rigefcere, vel motum eundem confici in linea phyficâ craffitudinis contemnendæ, interea dum hæc orbita motu tranfverfo et angulari velocitate femper quadrato diftantiæ corporis reciproce proportionali circa centrum virium C revolvatur; hoc motu compofito linea quædam Vpq in fpatio immobili defcribetur, et angularis velocitas radii vectoris Cp hanc lineam defcribentis erit æqualis fummis angularium velocitatum corporis in orbitâ moventis et orbitæ ipfius, hoc eft inversè ut quadratum diftantiæ, et proinde area hoc motu defcripta in eadem ratione ac in orbitâ immobili variabitur; area autem in orbitâ immobili eft tempori proportionalis, ergo in orbitâ motu hoc compofito defcriptâ erit etiam area tempori proportionalis. Ponamus jam corpus in fpatio non refiftente hoc modo moveri, tendetque vis centripeta ad punctum immobile circa quod areæ illæ defcribuntur. Temperari fingamus impulfus vis centripetæ, ita ut corpus movens fecundum legem prædictam in hâc linea femper inveniatur, et eadem erunt phœnomena, vis, et motus projectilis, utrum primo fingamus corpus revera hanc lineam circa punctum immobile defcribere, vel in trajectoriâ datâ revolvi, interea dum hæc trajectoria motu tranfverfo circa centrum virium revolvitur.

SECTIO QUINTA.

pC, KC et kC ſemper æquantur, manifeſtum eſt quod linearum PC et pC incrementa vel decrementa ſemper ſint æqualia, ideoque ſi corporum in locis P et p exiſtentium diſtinguantur motus ſinguli (per legum corol. 2.) in binos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas PC, pC determinentur, et alteri prioribus tranſverſi ſint, et ſecundum lineas ipſis PC, pC perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, et motus tranſverſus corporis p erit ad motum tranſverſum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, id eſt, ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p verſus C, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; et motu tranſverſo acquiret diſtantiam a linea pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum P acquirit a linea PC, ut eſt motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cum kr æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit a linea PC, ſitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis P, manifeſtum eſt quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora p et P æqualiter ſecundum lineas pC et PC moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur (p). Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut eſt angulus VCp ad angulum VCP, ſitque nC æqualis kC, et corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; ideoque vi majore urgetur quam corpus P, ſi modo angulus nCp angulo kCp major eſt, id eſt ſi orbis upk vel movetur

(p) 125. Corpora P, p æqualibus viribus ſecundum lineas PC, pC moventur, quæ lineæ initio motûs ſunt ipſæ æquales; diſtantiæ tamen completo illo tempore non erunt æquales, nec p in loco n reperietur; manifeſtum enim eſt, quòd corpora cum diverſis velocitatibus ab eodem puncto projecta non æqualiter a recto tramite deflectant ni vires centripetæ augeantur vel diminuantur; ſit igitur motus tranſverſus corporis p major vel minor quàm corporis P, corpora illa non eandem acquirent diſtantiam, ni motui corporis p addatur vel ſubducatur vis quædam mn.

vetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea CP in consequentia fertur; et vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia (q). Estque virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur circulus secans lineas mr, mn productas in s et t, et erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dato tempore dentur magnitudine, sunt kr et mr, earumque differentia mk et summa ms reciproce ut altitudo pC, ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC. Est et mt directe ut $\frac{1}{2}\, mt$, id est, ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; et hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens mn, eique proportionalis virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. Q. E. D. (r)

Corol. 1.

(q) 126. Quoniam est mr ad kr ut VCp ad VCP, prout VCp major est, vel minor, vel æqualis VCP, erit mr major vel minor vel æqualis ipsi kr; et mn positiva, negativa, vel evanescens. Si orbis upk moveatur in consequentia, patet mr majorem esse quam kr; ideoque vis altera priori addenda est, quâ corpus p describat mn. Si orbis upk in antecedentia moveatur cum celeritate duplâ ejus quâ linea CP in consequentia fertur, erit angulus VCu æqualis duplo VCP, et VCp æqualis VCP; corpusque in oppositam partem movens, describet orbem similem et æqualem ipsi VPK: si orbis in antecedentiâ movetur majori vel minori velocitate, patet mr majorem esse vel minorem quam kr, et vim mn in uno casu addendam esse, in altero subtrahendam. Si orbis in antecedentiâ movetur eâdem celeritate quâ CP fertur in consequentia motus transversus destruetur, corpusque p inter apsides movens rectâ lineâ ascendet descendetque vicissim.

(r) 127. THEOREMA. Vis centrifuga, quæ a motu circulari oritur, est in omni orbitâ, in quâ æquales areæ æqualibus temporibus describuntur in reciprocâ triplicatâ ratione distantiæ.

Cas. 1. Sit enim primò directio PR ad radium SP perpendicularis. Corpus P duabus agitatum viribus accedet vel recedet a centro cum vi quæ est differentia virium centripetarum et centrifugarum: describatur circulus PB cum eâdem angulari velocitate quâ orbita PQ, si corpus accedat, vel Pq, si corpus recedat a centro virium; et erit QB accessus corporis ad centrum in priori casu, et qB (TAB. VIII. FIG. 70.)

recessus

SECTIO QUINTA. *Corol.* 1. Hinc differentia virium in locis P et p, vel K et k, eſt ad vim qua corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens mn ad ſinum verſum arcus naſcentis PK, id eſt ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur

receſſus a centro in altero. Sunt igitur QB, qB differentiæ inter vires centripetas RQ, Rq et vires centrifugas in orbitis PQ, Pq reſpectivè; et proinde vires centrifugæ in his orbitis experimentur per quantitates $RQ - QB$ et $Rq + qB$, quæ æquales ſunt vi RB quâ circulus cum eâdem angulari velocitate deſcribitur. Vires autem RB ſunt ſemper ut quadrata arcuum ſimul deſcriptorum directè, et ut radii inversè; et ob areas æquales ſemper areis ſimul deſcriptis in orbitis PQ, Pq, et proinde æquales inter ſe, erunt ſemper arcus inversè ut radii, et vires inverſe ut cubi radiorum. Q. E. D.

TAB. VIII. FIG. 71. *Caſ.* 2. Sit jam directio Pr ad SP obliqua: ob directionem projectionis defertur corpus propius ad centrum quàm prius per ſpatium Rr, et ob vim attractivam corporis S deſcribit præterea ſpatium rQ: eſt autem BQ, acceſſus nempe corporis verſus centrum, æqualis differentiæ inter RQ totum motum corporis verſus centrum et vim centrifugam; et proinde manet vis centrifuga æqualis vi RB quâ circulus deſcribitur, ut in priori caſu.

128. *Cor* 1. Ex demonſtratione ſequitur, quòd ſi areæ non ſint temporibus proportionales, vires centrifugæ erunt in duplicatâ ratione arearum ſimul deſcriptarum directè, et ut cubi diſtantiarum inversè: nam arcus circulorum ſunt ut areæ deſcriptæ directe et diſtantiæ inverſe; et proinde quadrata arcuum per diſtantias diviſa erunt ut quadrata arearum diviſa per cubos diſtantiarum.

129. *Cor.* 2. Sequitur etiam quòd vis centrifuga ſit ad vim centripetam, ut chorda illa curvaturæ quæ per centrum virium tranſit ad duplam diſtantiam; nam vis centrifuga eſt vis quâ circulus eâdem angulari velocitate deſcribitur, et hæc vis eſt ad vim in orbitâ PQ directè in duplicatâ ratione velocitatum, et inversè ut chordæ curvaturæ (42), *i. e.* ob æquales velocitates, ut chordæ illæ inversè.

130. His poſitis, Prop. xxix. ſic demonſtrari poteſt aliter. Quoniam corpora per hyp. æqualiter verſus centrum accedunt vel recedunt, erit differentia virium centripetarum et centrifugarum in mobili orbitâ æqualis differentiæ virium in immobili: et proinde differentia virium centrifugarum erit æqualis differentiæ gravitatum. Sit angulus VCp ad angulum VCP in datâ ratione G ad F, erunt areæ datis temporibus deſcriptæ et areæ totæ in eâdem ratione; vis centrifuga in mobili orbitâ eſt ad vim in immobili, datâ diſtantiâ CP, ut G^2 ad F^2 (128); et proinde differentia virium erit ad vim centrifugam in immobili orbitâ in datâ ratione $GG - FF$ ad FF; vires autem centrifugæ in immobili et in mobili orbitâ variantur in diverſis diſtantiis in reciprocâ triplicatâ ratione diſtantiarum (127); et proinde differentia virium centrifugarum, eique æqualis differentia gravitatum, erit in eâdem ratione. Q. E. D.

piantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG—FF ad FF. Et propterea, ſi centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* deſcribatur ſector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit; differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili et corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, qua corpus aliquod, radio ad centrum ducto, ſectorem illum eodem tempore, quo deſcripta ſit area *VPC*, uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG—FF ad FF. Namque ſector ille et area *pCk* ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur. ([s])

Corol. 2. Si orbis *VPK* ellipſis ſit umbilicum habens *C* et apſidem ſummam *V*; eique ſimilis et æqualis ponatur ellipſis *upk*, ita ut ſit ſemper *pC* æqualis *PC*, et angulus *VCp* ſit ad angulum *VCP* in data ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* ſcribatur A, et pro ellipſeos latere recto ponatur 2 R: erit vis, qua corpus in ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ et contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, et vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. Vis autem qua corpus in circulo ad diſtantiam *CV* ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in ellipſi revolvens habet in *V*, eſt ad vim qua corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide *V*, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: et vis quæ ſit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in ellipſi immota *VPK*, et corpus *p* in ellipſi mobili

([s]) 131. Aliter. Quoniam vis centrifuga ſit vis quâ circulus eâdem angulari velocitate deſcribitur, erit per 130. differentia virium ad vim quâ corpus motu circulari revolvi poſſit ab *R* ad *K* eodem tempore quo corpus *P* in orbe immobili deſcribit arcum *PK*, in datâ ratione *GG*—*FF* ad *FF*.

132. *Cor.* 2. et 3. in *Cor.* 4to. includuntur, et eâdem demonſtrantur methodo.

SECTIO QUINTA.

mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, qua corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$; et componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ qua corpus in ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis *VPK* ellipſis ſit centrum habens in virium centro *C*; eique ſimilis, æqualis et concentrica ponatur ellipſis mobilis *upk*; ſitque 2 R ellipſeos hujus latus rectum principale, et 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus *VCp* ſemper ſit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili et mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ et $\frac{FFA}{T\ cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ reſpective.

Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, et radius curvaturæ quam orbis *VPK* habet in *V*, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, et vis centripeta, qua corpus in trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi poteſt in loco *V*, dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, et capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta, qua corpus idem eoſdem motus in eadem trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium X + $\frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$ (t).

Corol. 5.

(t) 133. Aliter. Vis centrifuga in loco *V* eſt ad vim centripetam $\frac{VFF}{TT}$, ut chorda curvaturæ ad duplam diſtantiam (129), vel ut *R* ad *T*, et proinde æqualis eſt

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, et inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur. SECTIO QUINTA.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam CV poſitione datam erigatur perpendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP, et ipſi æqualis agatur Cp, conſtituens angulum VCp, qui ſit ad angulum VCP in data ratione; vis, qua corpus gyrari poteſt in curva illa Vpk quam punctum p perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis Cp. Nam corpus P per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi poteſt in recta VP. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis CP vel Cp reciproce proportionalis, et (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk. TAB. VIII. FIG. 72.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA X.

Orbium qui ſunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apſidum.

Problema ſolvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipſi mobili (ut in propoſitionis ſuperioris corol. 2. vel 3.) revolvens deſcribit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apſides requiruntur, et quærendo apſides orbis quem corpus illud

eſt $\frac{VRFF}{T^3}$; differentia virium eſt ad vim centrifugam $\frac{VRFF}{T^3}$, ut $GG - FF$ ad FF, et proinde æqualis eſt $\frac{VRGG - VRFF}{T^3}$; cum autem hæc ſit ad differentiam in aliâ quâvis altitudine A, ut A^3 ad T^3, differentia in omni altitudine A valebit $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$: ad vim igitur X, quâ corpus revolvi poteſt in immobili orbitâ, addatur exceſſus $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, et componetur vis tota $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ quâ corpus in eadem trajectoriâ circulariter motâ iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Sectio Quinta.

illud in plano immobili defcribit (u). Orbes autem eandem acquirent formam, fi vires centripetæ quibus defcribuntur, inter fe collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales (v). Sit

(u) 134. In orbitis fimilibus et æqualibus, vires, fi fumantur æquales diftantiæ et correfpondentes, vel æquales funt, vel datam ad fe rationem femper confervant (per hactenus demonftrata): hinc fi orbita detur vi quacunque defcripta, et fingatur vis ad centrum aliud tendens, quæ ad eandem diftantiam a centro fuo vel æqualis eft vel in datâ ratione ad vim priorem, poffibile erit, ob vim in utroque cafu in eâdem ratione variantem, tali velocitate et tali directione corpus projicere, ut orbitam fimilem et æqualem priori defcribat; fi vero in hâc orbitâ erui poteft apfidum motus angularis, eruetur etiam in priori.

(v) 135. Fingatur corpus revolvi in ellipfi revolvente, et orbita motu compofito in fpatio immobili defcripta circularis non evadet fi orbita elliptica excentrica fit, et fumma vel differentia virium in nullâ certâ et determinatâ ratione diftantiæ variabitur; quo vero propiùs appropinquat orbita revolvens ad formam circularem, orbita in fpatio immobili defcripta eo propius accedet ad formam circularem, et lex in quâ variatur fumma vel differentia virium eo propius accedet ad quandam determinatam legem diftantiæ; etenim, fi orbita revolvens fiat circularis, orbita in fpatio immobili etiam fiet circulus diverfâ velocitate angulari defcriptus, et lex in qua variatur fumma vel differentia virium ea evadet (vel fractionalis vel integra) ad quam antea perpetuo accedebat. Si enim orbita fit revera circularis, propter diftantias æquales fummæ vel differentiæ virium quantitas erit invariabilis, et proinde hanc quantitatem fingere licet in datâ qualibet vel directâ vel inverfâ ratione diftantiæ variari: ergo, orbitâ jamjam abiturâ in circulum angulari motu regulari defcribendum, fingere licet unamquamque orbitam propemodum circularem defcribi motu corporis in ellipfi revolvente moventis, motumque in hâc orbita à vi variante in quâdam certâ lege diftantiæ vel fractionali vel integrâ oriri, ex eo quod differentia per quam à tali orbitâ abludat minor fumi poteft quantitate ullâ quæ affignari poteft, faciendo nimirum ut orbita ad orbitam circularem perpetuo appropinquet.

136. Detur orbita utcunque anomala et vi tendente ad punctum immobile defcripta; capiantur diftantiæ maximæ et minimæ quæ fe invicem immediate fequuntur, et defcribatur ellipfis fummâ harum diftantiarum pro axe, et dimidio differentiæ pro excentricitate; ita temperari poteft motus hujufce ellipfis, ut corpus in illa revolvens femper in orbita datâ inveniatur, in hoc cafu forfan motus non fit neceffario fecundum legem propofitionis 29 temperatus; quoniam vero corpus in ellipfi mobili revolvens orbitam quamlibet datam defcribere poteft; et quoniam, fi orbita defcripta fit circularis, hæc orbita defcribi poteft à corpore in orbitâ circulari revolvente, interea dum hæc ipfa orbita revolvetur, fequitur quod perpetuo acceffu orbitæ datæ ad formam circularem, motûfque angularis ad motum conftantem, orbita perpetuo

Sit punctum V apsis summa, et scribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, et X pro altitudinum differentia $CV - CP$; et vis, qua corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\,cub.}$, substituendo T—X pro A, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A\,cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* et numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

Sectio Quinta.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, sive (scribendo T—X pro A in numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3TTX + 3TXX - X\,cub.}{A\,cub.}$; et collatis numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis et non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad T *cub.* ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\,cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$ (x). Jam cum orbis ponatur circulo quam maxime fini-

petuo appropinquet ad formam orbitæ quæ ab ellipsi revolvente secundum leges prop. 29. describi potest, donec tandem ab orbitâ tali quantitate minori ullâ quæ assignari potest abludat; in hoc casu orbitæ evadere ponantur similes et æquales, et exinde vires proportionales: quoniam vero ope quantitatum vi centripetæ in ellipsibus proportionalium erui potest ellipsis motus, eruetur etiam apsidum motus in orbitâ, quæ, comparatione virium, orbitæ descriptæ ab ellipsi mobili reddetur similis et æqualis.

(x) 137. *Si quantitates duæ* a + x *et* b + y *componantur ex partibus datis* a *et* b, *et ex partibus non datis, simul tamen nascentibus, vel simul evanescentibus*, x *et* y; *fuerit autem* a + x *ut* b + y; *erit semper* x *ad* y *ut* a *ad* b. Dem. Cum enim ponatur $a + x$ ut $b + y$, erit semper $a + x$ ad $b + y$ in datâ ratione: nascentibus autem vel evanescentibus x et y, est $a + x$ ad $b + y$, ut a ad b; quare $a + x$ erit semper ad $b + y$, ut a ad b; ideoque x erit ad y semper ut a ad b.

Aliter. Est $a + x : b + y :: m : n$ ex hypothesi: sit $\dot{x}$ et $\dot{y}$ cotemporanea finita incrementa vel decrementa x et y, et erit $a + x + \dot{x} : b + y + \dot{y} :: m : n$ ex

finitimus, coeat orbis cum circulo; et ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut — FF ad — 3 TT, seu GG ad TT ut FF ad 3 TT, et vicissim GG ad FF ut TT ad 3 TT, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summa ad apsidem imam descendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, et orbis illius quem corpus in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam et apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summa ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, et inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; et sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ et n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales,

ex hypothesi; ergo $a+x+\dot{x} : b+y+\dot{y} :: a+x : b+y$; et $ab+bx+b\dot{x}+ay+yx+y\dot{x} = ab+ay+a\dot{y}+bx+xy+x\dot{y}$; et $b\dot{x}+y\dot{x} = a\dot{y}+x\dot{y}$; atque idcirco $\dot{x} : \dot{y} :: a+x : b+y :: m : n$. Si vero cotemporanea incrementa vel decrementa quantitatum duarum, quæ simul existere incipiunt, semper vel æquales sint vel in eâdem ratione, quantitates ipsæ vel æquales erunt, vel in hâc ratione; hoc est, erit $x : y :: a+x : b+y$ in omni casu, et $bx+yx = ay+yx$, vel $bx = ay$, atque idcirco $x : y :: a : b$.

les, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n ſeu $\overline{T - X}|^n$ in ſeriem indeterminatam per methodum noſtram ſerierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn - n}{2} XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius RGG—RFF+TFF—FFX, fit RGG—RFF+TFF ad T^n ut —FF ad $-nT^{n-1} + \frac{nn - n}{2} XT^{n-2}$ &c. Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut —FF ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, et viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\surd n$. Quare cum angulus *VCP*, in deſcenſu corporis ab apſide ſumma ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus *VCp*, in deſcenſu corporis ab apſide ſumma ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\surd n}$; et hoc angulo repetito corpus redibit ab apſide ima ad apſidem ſummam, et ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis a centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 et $\surd n$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam et apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, et completa alia quarta parte ad apſidem ſummam, et ſic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex propoſitione IX. manifeſtum eſt. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in ellipſi immobili, cujus centrum eſt in centro virium. Quod ſi vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia, id eſt directe ut $\frac{1}{A}$ ſeu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apſidem

ſummam

SECTIO QUINTA.

fummam et imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ feu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *fec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apfide fumma ad imam et ab ima ad fummam perveniet in æternum. Porro fi vis centripeta fit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id eft reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, ideoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ feu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit *n* æqualis $\frac{1}{4}$, et $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* et propterea corpus de apfide fumma difcedens et fubinde perpetuo defcendens, perveniet ad apfidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo afcenfu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apfidem fummam: et fic per vices in æternum. (y)

Exempl. 3. Affumentes *m* et *n* pro quibufvis indicibus dignitatum altitudinis, et *b*, *c* pro numeris quibufvis datis, ponamus vim cen-

* (y) 138. *Sit vis centripeta ut altitudinis dignitas quælibet cujus index eft* n — 3. *Quæritur angulus inter apfidem fummam et apfidem imam fecundum hypothefin corollarii tertii ubi nimirum centrum virium coincidit cum centro communi ellipfium.*

Secundum hanc hypothefin, adhibitâ notatione Newtonianâ, vis centripeta eft ut $\frac{F^2 A}{T^3} + \frac{RG^2 - RF^2}{A^3}$. Scribatur 1 pro T vel R, et vis centripeta jam erit ut $F^2 A + \frac{G^2 - F^2}{A^3}$, hoc eft ut $\frac{F^2 A^4 + G^2 - F^2}{A^3}$. Eft autem $A^4 = 1 - 4X$ &c. et $F^2 A^4 = F^2 - 4F^2 X$, &c. quare vis centripeta eft ut $\frac{F^2 - 4F^2 X + G^2 - F^2}{A^3}$, vel ut $\frac{G^2 - 4F^2 X}{A^3}$; ponitur autem vis centripeta ut A^{n-3} vel $\frac{A^n}{A^3}$; quare A^n eft ut $G^2 - 4F^2 X$: fed $A^n = 1 - nX$, &c. quare $G^2 - 4F^2 X$ eft ut $1 - nX$; unde eft G^2 ad 1, ut $4F^2$ ad n; unde $G^2 \times n = 4F^2$, et $G^2 = \frac{4F^2}{n}$, et $G = \frac{2F}{\sqrt{n}}$. Sed in hâc hypothefi eft F 90 Grad. cum fit 90 Grad. angulus inter apfidem fummam et apfidem imam in ellipfi quiefcente: Quare angulus inter apfidem imam, ubi vis centripeta eft ut A^{n-3} erit $\frac{180}{\sqrt{n}}$, idem nimirum qui prodit ex hypothefi corollarii fecundi.

centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ seu (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} \&c.}{A\ cub.}$$

et collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ab $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, et vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{n-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmetice per unitatem (z) fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter apsidem summam et apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus VCp inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter apsides invenietur graduum 180

(z) 139. Ratio subduplicata quantitatum $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ semper exprimet rationem G ad F, substituendo quemlibet numerum pro altitudine maximâ T: si numerus substituatur unitate major vel minor, quantitates T^{m-1} et T^{n-1} non erunt sibi invicem æquales, et proinde ratio G ad F non exprimetur in terminis quantitatum $b+c$ et $mb+nc$: ponendo vero T unitati æqualem, T^{m-1} et T^{n-1} erunt sibi invicem æquales, et ratio prædicta $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, semper exprimens ranem G^2 ad F^2, hac methodo eruta prodibit ratio $b+c$ ad $mb+nc$.

Sectio Quinta.

$\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, et pars data numeratoris hujus RGG—RFF+TFF—FFX ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluasdelendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; et contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, et altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per exempla secunda manifestum est ([a]). Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse ([b]). Corpus tali vi

([a]) 140. Per exempla secunda manifestum est, quod motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem sit $\frac{360}{\sqrt{p}}$, posito quod vis centripeta sit ut altitudinis A dignitas quælibet A^{p-3}, cujus index est $p-3$; in hoc corollario exprimitur motus ille per $\frac{360m}{n}$; sit igitur $\frac{360\,m}{n}=\frac{360}{\sqrt{p}}$, et per resolutionem æquationis fit $p-3=\frac{nn}{mm}-3$, quo substituto, est vis centripeta ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$.

([b]) 141. Hoc est, orbita qua movetur corpus cum vi, quæ in recessu a centro decrescit in majori quam triplicata ratione altitudinis, non describi potest motu corporis in peripheria ellipseos, dum ellipsis revolvitur circa focum suum: patet enim quantitatem $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ non exprimere majorem quam inversam triplicatam distantiæ rationem, ni ponatur $\frac{nn}{mm}$ negativa, in hoc casu fit motus apsidum $360\times\sqrt{-\frac{mm}{nn}}$, quæ est quantitas impossibilis.

vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de qua egimus in corol. 6. prop. XXIX ([c]). Sin cœperit illud, de apſide diſcedens ([d]), vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem corollario. ([e]) Sic et ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in

Sectio Quinta.

([c]) 142. Si enim vis gravitatis ſit in apſide illâ major quam vis centrifuga, quoniam in eâdem variatur ratione, erit ſemper major, corpuſque verſus centrum perpetuo deſcendet: et contra ſi minor ſit, corpus aſcendet in infinitum, neque ad maximam altitudinem unquam perveniet. Idem patet ex exemplo ſecundo hujus problematis; nam ſi vis centripeta variatur in inverſâ triplicatâ ratione diſtantiæ, in quantitate A^{n-3}, ſit $n = o$; et motus angularis ab apſide ad apſidem erit $\frac{180}{o}$, quæ eſt quantitas indefinitè magna.

([d]) 143. Si corpus non de apſide diſcedat, ad apſidem pervenire poteſt. Sit enim Vpk curva de quâ actum eſt in Cor. 6. Prop. 29. manifeſtum eſt quòd corpus p, non ab apſide diſcedens, movere poſſit a puncto p verſus Q, eâ lege, ut ſit ſemper Cp æqualis CP, et angulus VCp ad angulum VCP in data ratione: corpus p hâc lege movens, perveniet ad apſidem imam V, et poſtea aſcendet in infinitum.

Tab. VIII. Fig. 72.

([e]) 144. Quoniam enim vis centrifuga variatur in inverſâ triplicatâ ratione altitudinis, et vis gravitatis in majore quàm in hâc ratione, patet, quòd ſi vis centrifuga in apſide illâ major ſit quàm vis gravitatis, vim centrifugam in minori decreſcentem ratione ſemper majorem eſſe, et corpus aſcendere in infinitum. Et contra, ſi vis centrifuga minor ſit quàm vis gravitatis, quoniam in acceſſu corporis ad centrum minùs augeatur, erit ſemper minor, corpuſque verſus centrum deſcendet. Quò major eſt dignitas diſtantiæ cui vis gravitatis eſt reciprocè proportionalis, eò citius corpus ad centrum deſcendet: ſi vis gravitatis ſit in inverſâ triplicatâ ratione altitudinis, corpus non niſi infinitis revolutionibus ad centrum perveniet: ſi vis ſit reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis, et corpus juſtâ projiciatur velocitate, deſcendet in circulo in cujus peripheriâ eſt centrum virium per Cor. 1. Prop. IV; et ſi velocitas projectionis ſit ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam ut 1 ad $\sqrt{2}$, corpus in centrum decidet poſt quartam partem revolutionis: ſi vis gravitatis ſit reciprocè in quadruplicatâ ratione diſtantiæ, et corpus projiciatur cum velocitate quæ eſt ad velocitatem quâ circulus deſcribitur ad eandem diſtantiam, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, deſcribet corpus illud epicycloidem, et poſt dimidiam revolutionem in centrum decidet: ſi gravitas ſit reciprocè ut dignitas diſtantiæ cujus index eſt $n+3$, et velocitas

Sectio Quinta.

in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. ([f]) At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: et contra, ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens et aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: et quo citius corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apſide ſumma ad apſidem ſummam alterno deſcenſu et aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit

velocitas projectionis ſit ad velocitatem quâ circulus deſcribitur ad eandem diſtantiam ut 1 ad $\sqrt{1 + \frac{n}{2}}$, corpus in centrum decidet poſt partem revolutionis quæ eſt ad totam ut $\frac{1}{2n}$ ad 1. (Vid. Mac. Fl. Art. 437.)

([f]) 145. Si gravitas variatur in minore quam triplicatâ ratione diſtantiæ patet quòd ſi major ſit quàm vis centrifuga in ſuperiori parte orbitæ, tardius tamen in acceſſu ad centrum aucta, minor erit quàm vis centrifuga in inferiori parte orbitæ, et corpus ad priorem diſtantiam recedet. Si gravitas ſit in inversâ triplicatâ ratione diſtantiæ corpus ab apſide ſummâ diſcedens ad apſidem imam nunquam perveniet. Si gravitas ſit in inversâ duplicatâ ratione diſtantiæ, corpus in ſemiellipſi deſcendens in dimidiâ revolutione ad apſidem imam perveniet. Si gravitas ſit in reciprocâ quâdam ratione diſtantiæ, quæ minor eſt quàm triplicata, major autem quàm duplicata, corpus ad apſidem perveniet poſt partem revolutionis pluſquam dimidiam; vis enim centrifuga difficilius gravitatem ſuperabit. Contra, ſi gravitas ſit in minore quàm duplicatâ ratione diſtantiæ, vis centrifuga citius gravitatem ſuperabit, et corpus ad imam apſidem in minore quàm dimidiâ revolutione deſcendet. Patet igitur, ſi gravitas ſit in inversâ duplicatâ ratione diſtantiæ, apſides quieſcere, ſi in majori quàm in hâc ratione, ferri in conſequentia, ſi in minori, in antecedentia, et contra. Unde, apſidibus planetarum motu lentiſſimo et fere inſenſibili progredientibus, concludimus virium centripetarum proportiones haud multùm aberrare ab inversâ duplicatâ diſtantiarum.

erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id eſt reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; et propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{11}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; et propterea vis aut reciproce ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſumma ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, et præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* ſive ut 121 ad ad 120, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; et propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ ſeu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, ſed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam ſi corpus, vi centripeta quæ ſit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipſi umbilicum habente in centro virium, et huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognoſci poteſt (per exempla tertia) motus apſidum qui ex vi illa extranea orietur: et contra (g). Ut ſi vis

(g) 146. Vi varianti in inverſâ duplicatâ ratione diſtantiæ addatur perpetuo vis in triplicatâ ratione ejuſdem diſtantiæ, et ſumma non variabitur ſecundum ullam diſtantiæ legem determinatam; quo vero propius accedit orbita ad formam circularem eo propius accedit lex vis compoſitæ ad legem quandam duplicatam inter et triplicatam diſtantiæ, ita tandem ut in orbitâ propemodum circulari ſumma revera variabitur ſecundum determinatam quandam diſtantiæ legem. Auferatur a vi in duplicatâ inverſâ variante vis ipſi diſtantiæ proportionalis

Sectio Quinta.

vis qua corpus revolvitur in ellipſi ſit ut $\frac{1}{AA}$, et vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, et n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apſides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponamus vim illam extraneam eſſe 357.45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1, et $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180.7623, id eſt, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* Igitur corpus de apſide ſumma diſcedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* perveniet ad apſidem imam, et hoc motu duplicato ad apſidem ſummam redibit: ideoque apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *ſec.* Apſis lunæ eſt duplo velocior circiter (h).

SECTIO

portionalis, et reſiduum quoque in orbitâ propemodum circulari ſecundum determinatam quandam diſtantiæ legem variabitur. Fingatur igitur vim, compoſitam ex vi creſcente in inversâ duplicatâ et vi addititiâ creſcente in inversâ triplicata, variari in eâdem ratione ac vis, compoſita ex vi creſcente in inversâ duplicatâ et vi ablatitiâ diſtantiæ proportionali, et quoniam motus apſidum ex variatione vis in majori vel minori ratione quam inversâ duplicatâ diſtantiæ pendet, idem erit in utroque caſu eorundem motus.

(h) 147. Inveniantur proportio vis ablatitiæ ad vim addititiam, et earundem quantitates per calculos a Newtoni principiis pendentes; et, ſubtrahendo ſummas virium addititiarum a viribus ablatitiis, inveniatur exceſſus vis ablatitiæ ſupra vim addititiam; ponatur hunc exceſſum, ſublato motu regreſſivo, agere per totam orbitam lunarem, et apſidum motus hinc oriundus dimidium erit motûs ab aſtronomis obſervati. Probavit vero Newtonus hunc motum dimidiatum neceſſario oriri ex quantitate illâ datâ vis ablatitiæ, et proinde cauſam motûs illius dimidiati recte exponit ex principiis hujuſce ſectionis; altera vero pars hujuſce motûs ab excentricitate orbitæ lunaris, motu in tangente variabili, motu ipſius telluris, aliiſque cauſis, de quibus in hâc ſectione nulla habetur ratio, petenda videtur.

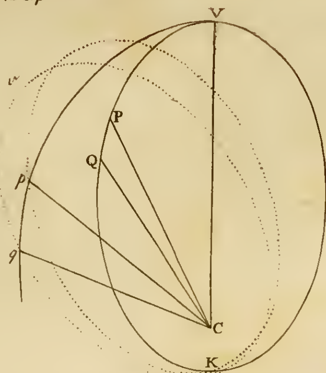


Fig. 67.

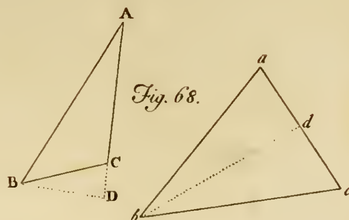


Fig. 68.

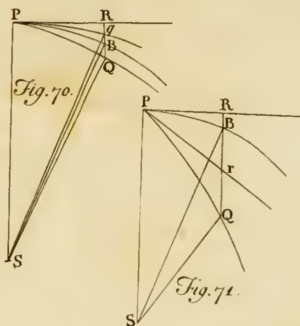


Fig. 70.

Fig. 71.

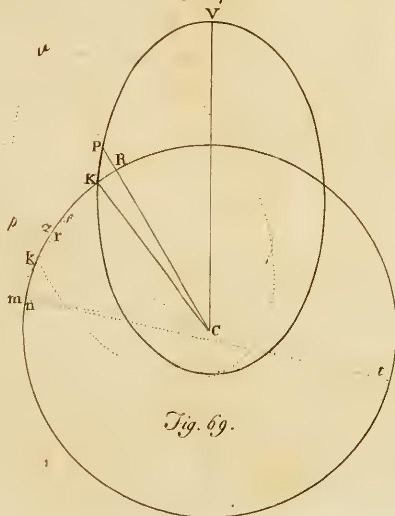


Fig. 69.

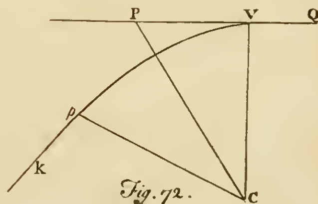


Fig. 72.

SECTIO VI.

Sectio Sexta.

De motu corporum viribus centripetis ſe mutuo petentium.

Hactenus expoſui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri ſolent ad corpora; et corporum trahentium et attractorum actiones ſemper mutuæ ſunt et æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens poſſit quieſcere neque attractum, ſi duo ſint corpora, ſed ambo (per legum corollarium quartum) quaſi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur: et ſi plura ſint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, et idem attrahant, vel omnia ſe mutuo attrahant; hæc ita inter ſe moveri debeant, ut gravitatis, centrum commune vel quieſcat, vel uniformiter moveatur in directum. Qua de cauſa jam pergo motum exponere corporum ſe mutuo trahentium, conſiderando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortaſſe, ſi phyſice loquamur, verius dicantur impulſus. In mathematicis enim jam verſamur: et propterea, miſſis diſputationibus phyſicis, familiari utimur ſermone, quo poſſimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXI.

Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum ſe mutuo, figuras ſimiles.

Sunt enim diſtantiæ corporum a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus; atque ideo in data ratione ad invicem, et componendo in data ratione ad diſtantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ diſtantiæ circum terminum ſuum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum

SECTIO SEXTA. rectum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, et æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos in planis, quæ una cum his terminis vel quiescunt, vel motu quovis non angulari moventur, describunt omnino similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantiis circumactis describuntur ([i]). Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXII.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, et interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis et æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

TAB. IX. FIG. 74. Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T*, deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis *SP*,

([i]) 148. Projiciantur corpora *S*, *T* in contrariis directionibus, ita ut centrum gravitatis *C* quicescat; et si in dato tempore corpus *T* ad punctum *t* perveniat, et agatur *tc*, erit corpus alterum in lineâ illâ productâ; et distantia ejus *Cs* erit ad *Ct*, ut quantitas materiæ corporis *T* ad quantitatum materiæ corporis *S*, hoc est, ut *CS* ad *CT*, per naturam centri gravitatis; et proinde, ob angulum *SCs* æqualem angulo *TCt*, erunt figuræ *SCs*, *TCt*, circa commune centrum gravitatis descriptæ, similes. Præterea, corpora *S*, *T* describunt etiam circa se mutuo figuras et similes inter se, et similes etiam figuris circa punctum *C* descriptis: corpus enim *T* per arcum *Tt* movens describet circa quiescens *S* angulum *TSt*; moveat interea *S* per spatium *Ss*, et describetur præterea angulus æqualis angulo *Sts*, qui duo anguli simul sumpti æquales sunt externo angulo *TCt*: eodem modo ostendi potest corpus *S* describere circa *T* angulum æqualem angulo *SCs*: unde, quoniam per naturam centri gravitatis, totæ inter corpora distantiæ sunt, et inter se, et ad distantias a centro gravitatis *C* in data ratione, sequitur quatuor illas figuras similes esse. (TAB. IX. FIG. 73.)

Projiciantur jam corpora *S*, *T* ita ut corpora illa cum centro *C* quiescente non jaceant in eâdem rectâ, tum movebitur centrum illud uniformiter in directum, et motus corporum inter se iidem erunt ac si centrum illud quiesceret (Cor. 6. leg. mot.); ideoque figuræ similes sunt ut prius.

SP, *TQ* æquales et parallelæ ducantur ſemper *sp*, *sq*; et curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* deſcribit, erit ſimilis et æqualis curvis, quas corpora *S*, *P* deſcribunt circum ſe mutuo: proindeque (per theor. XXI.) ſimilis curvis *ST* et *PQV*, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: idque quia proportiones linearum *SC*, *CP*, et *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

Caſ. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quieſcit, inque *s* et *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* et *P* ſimilia et æqualia. Dein tangant rectæ *PR* et *pr* curvas *PQ* et *pq* in *P* et *p*, et producantur *CQ* et *sq* ad *R* et *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in data ratione. Proinde ſi vis, qua corpus *P* verſus corpus *S*, atque ideo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim, qua corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curva *pqv*, quæ ſimilis eſſet curvæ *PQV*, in qua vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; et revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem et æqualitatem corporum *S* et *s*, *P* et *p*, et æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: et propterea, ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis *p* eſſe ad velocitatem corporis *P* in ſubduplicata ratione diſtantiæ *sp* ad diſtantiam *CP*, eo ut temporibus, quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione, deſcribantur

SECTIO SEXTA.

bantur arcus pq, PQ, qui sunt in ratione integra [k]: Et corpora P, p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C et s figuras similes PQV, pqv, quarum posterior pqv similis est et æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. E. D.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; et (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, et propterea figuræ pqv similes et æquales. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. IX.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, ellipses concentricas [l]; et vice versa, si tales figuræ describuntur, sunt vires distantiæ proportionales.

Corol. 2.

* (k) 149. Si velocitates in P et p fuerint in subduplicatâ ratione CP ad sp, corpora P et p describent arcus similes in temporibus quæ erunt etiam in subduplicatâ illâ ratione; et si velocitates in Q et q fuerint ut $\sqrt{CQ}$ ad $\sqrt{sq}$ vel ob similitudinem arcuum ut $\sqrt{CP}$ ad $\sqrt{sp}$, corpora P et p pergent arcus similes in temporibus proportionalibus describere. Videamus ergo an velocitates in Q et q sint ad invicem in hâc ratione. Anguli CPQ et spq ob similitudinem sitûs corporum P et p in curvis similibus æquantur; ergo vires centripetæ quibus hæc corpora in lineas curvas detorquentur similiter applicantur. Sed vires æquales similiter applicatæ velocitates generant temporibus proportionales; ergo incrementa vel decrementa velocitatum in locis Q et q sunt ut $\sqrt{CP}$ ad $\sqrt{sp}$. Addantur hæc incrementa vel subducantur decrementa velocitatibus in P et p quæ sunt etiam ut $\sqrt{CP}$ ad $\sqrt{cp}$, et prodibunt velocitates in Q et q etiam in eâdem illâ ratione. Sunt ergo velocitates in locis omnibus similibus ut $\sqrt{CP}$ ad $\sqrt{sp}$.

TAB. IX. FIG: 73.

(l) 150. Describat corpus T lineam Tt; centrum orbitæ circa S descriptæ erit in ipso corpore S; describat interea S lineam Ss; et centra arcuum omnium quàm minimorum, quos corpus T circa S describit, invenientur perpetuo in linea Ss: completâ igitur totâ revolutione, ipsa orbita corporis S locus erit omnium centrorum; et centrum ejus C centrum erit totius orbitæ a corpore T circa S descriptæ. Eodem modo patet, centrum orbitæ quam corpus S circa T describit esse in loco C.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus, describunt (per prop. XIII. XIV. XV.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis et ad centrum illud et ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXIII.

Corporum duorum S *et* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, et figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem et æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S + P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes PQ et pq describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum CP et SP vel sp, hoc est, in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ et pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo S *et* P, *viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus, ſe mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipſeos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem ellipſeos, quam corpus idem* P *circa alterum quieſcens* S *eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum* S + P *ad primum duorum medie proportionalium inter hanc ſummam et corpus illud alterum* S.

Nam ſi deſcriptæ ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema ſuperius) forent in ſubduplicata ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in ellipſi poſteriore, et tempora periodica evadent æqualia; ellipſeos autem axis principalis (per prop. XVII.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicata, id eſt in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ eſt triplicata; ideoque erit ad axem principalem ellipſeos alterius, ut primum duorum medie proportionalium inter $S+P$ et S ad $S+P$. Et inverſe, axis principalis ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum medie proportionalium inter $S+P$ et S (m). Q. E. D.

PRO-

(m) 151. Cum $T^2 : t^2 :: S+P : S$ per prop. XXXIII; et $T^2 : t^2 :: A^3 : X^3$, (poſitis nempe A et X pro axibus ellipſium deſcriptarum) per prop. XVII; erit $S+P : S :: A^3 : X^3$. Sed cum quatuor quantitates geometricè proportionales ſint, prima eſt ad quartam, ut cubus primæ ad cubum ſecundæ; ergo duobus mediis proportionalibus inter $S+P$ et S ſumptis, eſt $S+P$ ad S ut $\overline{S+P}^3$ ad cubum primi horum duorum, ideoque $S+P$ ad primum illud ut A ad X.

TAB. IX. FIG. 75. 152. Methodus media dua proportionalia inveniendi hæc ſit. Sint E et F rectæ duæ lineæ longitudinis cujuſcunque, et a puncto A ducantur lineæ AB

et

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XXV.

Sectio Sexta.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum a centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi a corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut et ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia et quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia, et quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ

et *AC* ad invicem perpendiculares. Fiat parabola *ADG*, cujus axis eſt *AB* cujuſque latus rectum æquatur lineæ *E*, ducaturque alia parabola *ADH*, cujus axis eſt *AC* cujuſque latus rectum lineæ *F* æqualis eſt. Hæ parabolæ ſeſe interſecent in puncto *D*, et demiſſis perpendiculis *DC*, *DB*, eſt *E* : *BD* :: *BD* : *BA* (Ham. Con. Sect. L. II. P. i.) et *BD* : *DC* vel *BA* :: *DC* vel *BA* : *F*. Ergo *E*, *BD*, *BA* et *F* ſunt quatuor geometricè proportionales.

153. Hinc inveniri poſſunt diametri principales orbium quos planetæ deſcribunt. Capiendæ ſunt enim in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum per prop. XVII, et deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis et planetæ cujuſque revolventis ad primum duorum medie proportionalium inter hanc ſummam et ſolem.

SECTIO SEXTA.

diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia et quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia et analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex reſpectu diſtantiæ utriuſque (n). Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XI.

Viribus quibus corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur motus plurium corporum inter ſe (o).

TAB. IX. FIG. 76.

Ponantur primo corpora duo T et L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc (per corollarium primum theorematis XXII.) ellipſes centra habentes in D.

Trahat

* (n) 154. Moveantur duo corpora S et P circa commune gravitatis centrum C, et nominetur SP, x, et CP, z; et ponantur corpora S et P æqualia, ita ut ſit $x = 2z$; exponamus denique vim centripetam qua corpus S trahit corpus P per quantitatem aliquam compoſitam, qualis eſt $Ax + Bx^2$, habitis A et B pro quantitatibus quibuſlibet datis, et ſi exponatur lex $Ax + Bx^2$ per poteſtates ipſius z evadet $2Az + 4Bz^2$; vel poſitis a et b pro $2A$ vel $4B$, lex vis centripetæ ad commune centrum C tendentis fiet $az + bz^2$; et quantitas $az + bz^2$ ſemper erit æqualis quantitati $Ax + Bx^2$. Statuatur jam corpus aliquod in communi centro C, quod trahat corpus P vi centripetâ $az + bz^2$, corpore S jam deſtructo; et corpus P jam trahetur ad corpus in centro C conſtitutum omnino pariter ac prius, tum quoad directionem, tum quoad quantitatem vis centripetæ.

*(o) 155. LEMMA. Si feratur corpus aliquod L circa centrum D cum vi centripetâ quæ ſit ut $A \times DL$, tempus periodicum erit reciprocè in ſubduplicatâ ratione quantitatis A. Nam (per Cor. 2. Prop. IX.) tempus periodicum idem erit ac ſi corpus L circulum deſcriberet circa centrum D ad diſtantiam quamvis DL: deſcribat ergo; et ſi tempus periodicum vocetur T, erit $A \times DL$ ut $\frac{DL}{T^2}$ (per Cor. 2. Prop. IV); unde erit T^2 ut $\frac{1}{A}$ et T ut $\frac{1}{\sqrt{A}}$. Q. E. D.

156. Poſitis

Trahat jam corpus tertium S priora duo T et L viribus acceleratricibus ST, SL, et ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST (per legum corol. 2.) resolvitur in vires SD, DT; et vis SL in vires SD, DL. Vires autem DT, DL, quæ sunt ut ipsarum summa TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T et L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T et L, prior priori et posterior posteriori, componunt vires distantiis DT ac DL proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. I. prop. IX. et corol. I. et 8. prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD et SD, actionibus motricibus $SD \times T$ et $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter et secundum lineas TI, LK, ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem,

sed

156. Positis quæ in hâc prop. trahat corpus unumquodque corpora reliqua cum vi acceleratrice, quæ sit ut corpus trahens et distantia corporum attractorum conjunctim; et exponetur vis qua corpus T trahit corpus L per quantitatem $T \times TL$; cumque sit L ad T ut TD ad DL, erit (*componendo*) $T + L$ ad T ut TL ad DL; unde $T \times TL$ æqualis erit $\overline{T + L} \times DL$: trahitur ergo corpus L ad centrum commune D, perinde ac si corpus T tolleretur et aliud corpus $T + L$ in communi centro D immotum constitueretur; et tempus periodicum corporis L circum D erit ad tempus periodicum corporis L circum T immotum, in subduplicatâ ratione corporis T ad summam corporum $T+L$ (155.) Accedat jam corpus tertium S, et vis quâ corpus S trahit corpus T exponetur per $S \times ST$, æqualis viribus $\overline{S \times TD} + \overline{S \times SD}$. Similiter vis quâ corpus S trahit corpus L æqualis erit viribus $\overline{S \times LD} + \overline{S \times SD}$: quare summa virium, quâ corpus S trahit corpora T et L, est $\overline{S \times TD} + \overline{S \times DL} + \overline{S \times 2SD}$; sed vis $S \times 2SD$ minimè perturbat motum systematis ut demonstrat Newtonus; et vi $\overline{T + L} \times DL$, quâ corpus L trahebatur ad centrum D ante accessum corporis S, jam additur vis $S \times DL$, ita ut vis tota quâ corpus L trahitur ad centrum D jam sit $\overline{S + T + L} \times DL$; minuitur ergo tempus periodicum corporum T et L circa commune ipsorum gravitatis centrum D per accessum corporis S in subduplicatâ ratione $S + T + L$ ad $T + L$; et corpus alterutrum, puta L, trahitur ad centrum D perinde ac si corpora S et T submoverentur, et corpus $S + T + L$ in communi centro D collocaretur. Similiter si accedat corpus quartum V, trahetur corpus L ad centrum D perinde ac si corpora V, S, T submoverentur, et corpus $V + S + T + L$ in centro D collocaretur, et tempus periodicum accessu corporis V minuetur in subduplicatâ ratione $V + S + T + L$ ad $S + T + L$.

Hæc

ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, et lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam IK acceſſus faciendo ut ſyſtema corporum T et L ex una parte, et corpus S ex altera, juſtis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S, eo quod ſumma virium motricium $SD \times T$ et $SD \times L$, diſtantiæ CS proportionalium, tendit verſus centrum C, deſcribit ellipſin circa idem C; et punctum D, ob proportionales CS, CD, deſcribet ellipſin conſimilem e regione. Corpora autem T et L viribus motricibus $SD \times T$ et $SD \times L$, prius priore, poſterius poſteriore, æqualiter et ſecundum lineas parallelas TI et LK, ut dictum eſt, attracta, pergent (per legum corollarium quintum et ſextum) circa centrum mobile D ellipſes ſuas deſcribere, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V, et ſimili argumento concludetur hoc et punctum C ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis,

Hæc ſunt phænomena motuum binorum quorumcunque corporum circa commune ipſorum gravitatis centrum. Videamus jam phænomena motuum reſpectu reliquorum centrorum C et B. Corpus S trahitur ad corpus T vi centripeta $T \times TS$ æquali viribus $\overline{T \times TD} + \overline{T \times SD}$; ſimiliter vis, quâ corpus S trahitur ad corpus L, æquatur viribus $\overline{L \times LD} + \overline{L \times SD}$; quare ſumma virium quibus corpus trahitur a corporibus T et L, eſt $\overline{T \times TD} + \overline{L \times LD} + \overline{T+L} \times SD$. Sed vires $T \times TD$ et $L \times LD$, cum ſint æquales et contrariæ, ex naturâ centri gravitatis ſe mutuo deſtruunt; manet itaque vis $\overline{T+L} \times SD$ quâ corpus trahitur a corporibus T et L, pariter ac ſi corpora illa T et L in unum coaleſcerent, et in communi centro D locarentur. Porro cum ſint ex naturâ centri gravitatis S ad $T+L$ ut CD ad CS, et componendo $S+T+L$ ad $T+L$ ut SD ad SC, erit $\overline{T+L} \times SD = \overline{S+T+L} \times SC$; ergo corpus S trahitur ad commune centrum C cum vi $\overline{S+T+L} \times SC$. Accedat rurſus corpus quartum V, et vis quâ V trahitur ad S erit $S \times VS = \overline{S \times SC} + \overline{S \times VC}$; et vis quâ corpus V trahitur a corporibus T et L erit $\overline{\overline{T+L} \times CD} + \overline{T+L} \times VC$, uti ante dictum eſt; quare vis tota qua corpus V trahitur a corporibus S, T, L, eſt $\overline{S \times SC} + \overline{\overline{T+L} \times CD} + \overline{S+T+L} \times VC$. Sed vires $S \times SC$ et $\overline{T+L} \times CD$ ſe mutuo deſtruunt ut prius; quare vis quâ corpus V trahitur a corporibus S, T, L eſt $\overline{S+T+L} \times VC$: eſt autem V ad $S+T+L$ ut BC ad VB, et componendo $V+S+T+L$ eſt ad $S+T+L$ ut

gravitatis *B* defcribere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* et *S* circa centra *D* et *C*, fed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I. Sectio Sexta.

Hæc ita fe habent, etfi corpora *T* et *L* trahunt fe mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione diftantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut diftantiæ ductæ in corpora trahentia, et ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipfes varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili defcribunt. Q. E. I.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXVI.

Corpora plura, quorum vires decrefcunt in duplicata ratione diftantiarum ab eorundem centris, moveri poffe inter fe in ellipfibus; et radiis ad umbilicos ductis areas defcribere temporibus proportionales quam proxime.

In propofitione fuperiore demonftratus eft cafus ubi motus plures peraguntur in ellipfibus accurate. Quo magis recedit lex virium a lege ibi pofita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteft, ut corpora, fecundum legem hic pofitam fe mutuo trahentia, moveantur in ellipfibus accurate, nifi fervando

ut *VC* ad *VB*: eft ergo $\overline{S+T+L} \times VC = \overline{V+S+T+L} \times VB$. Trahitur ergo corpus unumquodque *V* ad commune omnium centrum *B* omnino fimiliter ac fi corpus $V+S+T+L$ æquale nempe toti fyftemati in communi centro *B* conftitueretur; et vires abfolutæ ad centra *B*, *C*, *D*, tendentes æquales funt inter fe. Sunt ergo tempora periodica tum corporis uniufcujufque circa centrum *B*, tum trium quorumcunque circa centrum *C*, tum duorum quorumcunque circa centrum *D* æqualia inter fe, et ad tempus periodicum corporis *L* circa centrum immotum *T* in fubduplicatâ ratione corporis *T* ad totum fyftema $V+S+T+L$. Trahant jam corpora *T* et *L* fe mutuo viribus vel majoribus vel minoribus quam quibus trahunt cætera, et tempus periodicum fyftematis $T+L$ circa centrum *D* minuetur vel augebitur in fubduplicatâ ratione virium auctarum vel diminutarum (155); fed motus reliquorum ex hâc virium intenfione vel remiffione minime perturbabitur.

Sectio Sexta.

vando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multum ab ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: et maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; niſi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, et actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipſibus quadrent, et areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. *Q.E.O.*

Caſ. 2. Fingamus jam ſyſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuo revolventium corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, et interea vi corporis alterius longe maximi et ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum eſſe inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; et augendo corporis maximi diſtantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ reſpectu earum longitudinis, et in-

clinationes

clinationes ad invicem minores ſint, quam datæ quævis; perſeverabunt motus partium ſyſtematis inter ſe ſine erroribus, qui non ſint quibuſvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem diſtantiam, ſyſtema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc eſt, centro ſuo gravitatis deſcribet circa corpus maximum ſectionem aliquam conicam (*viz.* Hyperbolam vel parabolam attractione languida, ellipſin fortiore) et radio ad maximum ducto deſcribet areas temporibus proportionales, ſine ullis erroribus, niſi quas partium diſtantiæ, perexiguæ ſane et pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q.E.O. (p)

Simili

(p) 157. Sumatur pro hypotheſi centrum ſyſtematis mundani quieſcere (quod ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendunt) et videamus quid inde ſequatur.

1mò. *Commune gravitatis centrum terræ, ſolis, et planetarum omnium quieſcit.* Nam centrum illud (per legum Cor. IV.) vel quieſcet, vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi movebitur quoque contra hypotheſin.

2dò. *Sol motu perpetuo agitatur, ſed nunquam a communi gravitatis centro planetarum omnium longe recedit.* Nam cum materia in ſole (119) ſit ad materiam in jove ut 1067 ad 1, et diſtantia jovis a ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo majore [eſt enim ut 1115 ad 1,] incidet commune centrum gravitatis jovis et ſolis in punctum paulo ſupra ſuperficiem ſolis. Eodem argumento cum materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, et diſtantia ſaturni a ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulo minore, incidet commune gravitatis centrum ſaturni et ſolis in punctum paulo infra ſuperficiem ſolis. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, ſi terra et planetæ omnes ex una ſolis parte conſiſterent, commune omnium gravitatis centrum vix integra ſolis diametro a centro ſolis diſtaret. Aliis in caſibus, diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed a centro illo nunquam longe recedet.

Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis et planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol, et planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, et propterea pro vi gravitatis ſuæ ſecundum leges motus perpetuo agitentur: perſpicuum eſt, quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cum autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, a quo centrum ſolis quam minime diſcedit, et a quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet et major, ut minus moveretur.

S 3tiò.

SECTIO SEXTA.

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus in-

3tiò. *Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro solis, et radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.* Disputavimus supra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera planetarum in solem sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro solis, si sol quiesceret et planetæ reliqui non agerent in se mutuo, forent orbes eorum elliptici, solem in umbilico communi habentes, et areæ describerentur temporibus proportionales (per prop. 1, et XIII, et Cor. 1. prop. XV.): actiones autem planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) et motus planetarum in ellipsibus circa solem mobilem minus perturbant, quam si motus illi circa solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem jovis in saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem est ad gravitatem in solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1067 (119); ideoque in conjunctione jovis et saturni, quoniam distantia saturni a jove est ad distantiam saturni a sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas saturni in jovem ad gravitatem saturni in solem, ut 81 ad 16×1067, seu ut 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis saturni in singulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem astronomi hæreant. In his conjunctionibus gravitates acceleratrices solis in saturnum, jovis in saturnum, et jovis in solem, sunt fere ut 16, 81, et $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ seu 156609, ideoque differentia gravitatum solis in saturnum et jovis in saturnum est ad gravitatem jovis in solem, ut 65 ad 156609, seu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima saturni efficacia ad perturbandum jovis motum, et propterea perturbatio orbis jovialis longe minor est quam ea saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores præterquam quòd orbis terræ sensibiliter perturbatur a luna. Commune centrum gravitatis terræ ac lunæ, ellipsin circa solem in umbilico positum percurrit, et radio ad solem ducto areas in eâdem temporibus proportionales describit, terra vero circa hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

inæqualitas major ſit quam inæqualitas proportionis diſtantiarum a corpore maximo. Nam ſi vis acceleratrix, æqualiter et ſecundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter ſe, neceſſe eſt, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum, agendo in aliqua corpora et non agendo in alia, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione et inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam. Sectio Sexta.

Corol, 5. Unde ſi ſyſtematis hujus partes in ellipſibus, vel circulis ſine perturbatione inſigni moveantur; manifeſtum eſt, quod eædem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur niſi leviſſime, aut urgentur æqualiter, et ſecundum lineas parallelas quamproxime.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXVII.

Si corpora tria, quorum vires decreſcunt in duplicata ratione diſtantiarum, ſe mutuo trahant; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium ſint inter ſe reciproce ut quadrata diſtantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipſum ductis, deſcribet areas temporibus magis proportionales, et figuram ad formam ellipſeos umbilicum in concurſu radiorum habentis magis accedentem; ſi corpus maximum his attractionibus agitetur; quam ſi maximum illud vel a minoribus non attractum quieſcat, vel multo minus vel multo magis attractum, aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonſtratione corollarii ſecundi propoſitionis præcedentis; ſed argumento magis diſtincto et latius cogente ſic evincitur.

Sectio Sexta.

Tab. IX. Fig. 77.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P et S in eodem plano circa maximum T, quorum P describat orbem interiorem PAB, et S exteriorem ESE. Sit SK mediocris distantia corporum P et S; et corporis P versus S attractio acceleratrix, in mediocri illa distantia, exponatur per eandem. In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, et erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantia quavis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M; et attractio SL resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, et oritur a mutua attractione corporum T et P. Hac vi sola corpus P circum corpus T, sive immotum, sive hac attractione agitatum, describere deberet et areas, radio PT, temporibus proportionales, et ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T. Patet hoc per prop. xiii. et corollaria 2. et 3. theor. xxii. Vis altera est attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad T, superaddita vi priori coincidet cum ipsa, et sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. xxii. At quoniam non est quadrato distantiæ PT reciproce proportionalis (q), componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. xiii. et per corol. 2. theor. xxii.) vis, qua ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, et esse quadrato distantiæ PT reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportione, faciet ut orbis PAB aberret a forma ellipseos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major est aberratio ab hac proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero

(q) 158. Si detur SK mediocris distantia corporum P et S, vis LM erit ut $\frac{PT}{SP^3}$; nam ex constructione $SL : SK :: SK^2 : SP^2$, ideoque $SL \times SK : SK \times SP$ (id est $SL : SP$) $:: SK^3 : SP^3$; sed $SL : SP :: LM : PT$; ergo $LM : PT :: SK^3 : SP^3$, et $LM = \frac{PT \times SK^3}{SP^3}$, id est datâ SK, ut $\frac{PT}{SP^3}$.

vero vis tertia SM, trahendo corpus P ſecundum lineam ipſi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim, quæ non amplius dirigitur a P in T; quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major eſt proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non amplius temporibus proportionales deſcribat; atque ut aberratio ab hac proportionalitate tanto major ſit, quanto major eſt proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma elliptica præfata hæc vis tertia duplici de cauſa adaugebit, tum quod non dirigatur a P ad T, tum etiam quod non ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ PT (r). Quibus intellectis, manifeſtum eſt, quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; et quod orbis PAB tum maxime accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam ſecunda quam tertia, ſed præcipue vis tertia fit minima, vi prima manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix verſus S per lineam SN; et ſi attractiones acceleratrices SM, SN æquales eſſent; hæ trahendo corpora T et P æqualiter et ſecundum lineas parallelas nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum corol. vi.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio SN minor eſſet attractione SM, tolleret ipſa attractionis SM partem SN, et maneret pars ſola MN, qua temporum et arearum proportionalitas et orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio SN major eſſet attractione SM, oriretur ex differentia ſola MN perturbatio proportionalitatis et orbitæ (s). Sic per

(r) 159. Si dentur mediocris diſtantia SK et diſtantia ST, erit vis SM ut $\frac{1}{SP^3}$; nam $SM : LM :: ST : PT$, unde $SM = \frac{LM \times ST}{PT}$, ſed (158) $LM = \frac{PT \times SK^3}{SP^3}$, ergo $SM = \frac{ST \times SK^3}{SP^3}$, id eſt, datis SK et ST, ut $\frac{1}{SP^3}$.

(s) 160. Linea per quadraturas C, D ducta orbitam PAB bifariam ſecaret: dum corpus P in eâ orbitæ ſuæ parte quod corpori S proximum eſt verſetur,

SECTIO SEXTA.

per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN, attractione prima et secunda manentibus prorsus immutatis: et propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, et orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P et T attractiones acceleratrices, factæ versus corpus S, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minima attractionum omnium SM, sed inter attractionum omnium SM maximam et minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK. Q.E.D.

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diversis; et vis LM, agendo secundum lineam PT in plano orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit. At vis altera NM, agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P et T ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN, ideoque minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multo major, neque multo minor attractione SK. Q.E.D.

Corol. 1. Ex his facile colligitur, quod, si corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur et agitatur, atque cætera a se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum T, P, S, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem

versetur, attractio SN minor est quam SM; in oppositâ parte major est quam SM; iisque in locis, in quibus SP, SK æquantur, coeuntibus K et L, coeunt quoque SM, SN; et ibi attractiones SN, SM æquales fiunt.

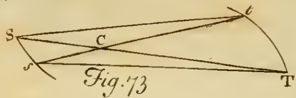


Fig. 73

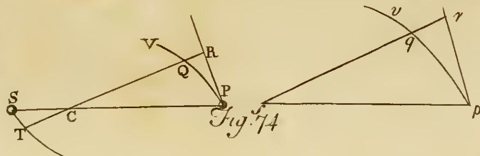
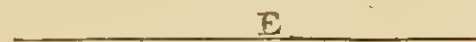


Fig. 74





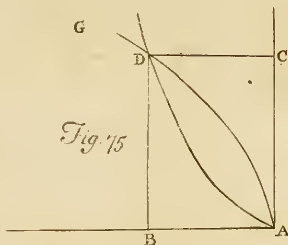


Fig. 75

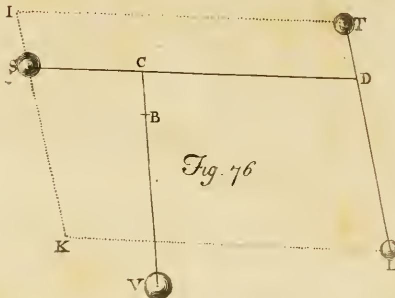


Fig. 76

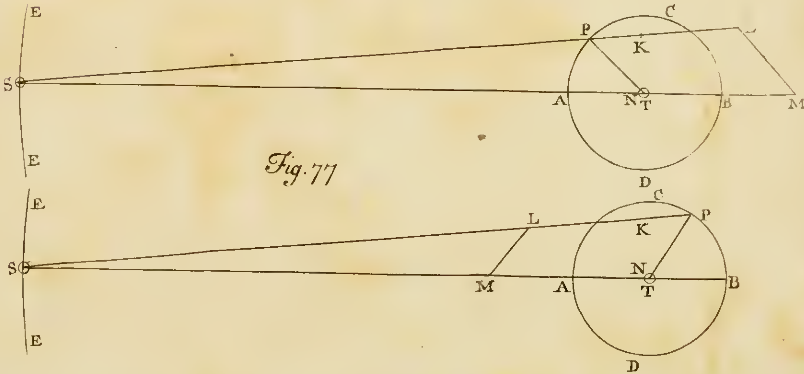


Fig. 77

invicem reciproce ut quadrata diſtantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius deſcribet prope conjunctionem *A* et oppoſitionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur et corpus *T* non urgetur, quæque non agit ſecundum lineam *PT*, accelerat vel retardat deſcriptionem areæ, perinde ut ipſa in conſequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis eſt vis *NM*. Hæc in tranſitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in conſequentia, motumque accelerat; dein uſque ad *D* in antecedentia, et motum retardat; tum in conſequentia uſque ad *B*, et ultimo in antecedentia tranſeundo a *B* ad *C* (t).

Sectio Sexta.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione et oppoſitione quam in quadraturis (u).

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione et oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione et oppoſitione contraria eſt vi, qua corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T* (x).

Corol. 5.

(t) 161. Vis ablatitia *MN* in motu corporis a quadratura *C* ad conjunctionem *A*, agens in directione *P m* ipſi *S T* parallelâ, faciet ut *P* ad centrum *T* non tendat, ſed verſus plagam in quam fit motus; contra, in motu a conjunctione *A* ad quadraturam *D*, faciet ut *P* tendat in antecedentia: deſcriptio autem arearum acceleratur, ſi vires declinant in conſequentia; et retardatur, ſi in antecedentia (20). In oppoſitâ parte orbitæ vis ablatitia *MN* trahens *T* a *P* verſus *S*, diminuit gravitatem ipſius *P* verſus *T*, et conſideranda eſt tanquam vis agens in corpus *P* in contrariâ directione ipſi *S T* parallelâ; et proinde in tranſitu a *D* ad *B*, faciet ut corpus tendat ad centrum in conſequentia, et in tranſitu a *B* ad *C*, ad centrum in antecedentia poſitum. Tab. X. Fig. 78.

(u) 162. Reſolvendo vim ablatitiam *Pm* in duas vires, quarum una *Pn* agit in directione ipſius *T P*, altera *n m* in directione parallela tangenti, vis *n m* in tranſitu a quadraturis ad ſyzygias, agens in directione quâ movetur corpus, motum ejus accelerat; et in tranſitu a ſyzygiis ad quadraturas, agens in contrariâ directione, motum ejus retardat.

(x) 163. Quò major eſt vis, et quò minor velocitas, eò major eſt curvatura; et contra.

SECTIO SEXTA.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione et oppositione (y). Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis *P* excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus *P*, ad apsidem summam appellans, absit longius a corpore *T* in syzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis *KL*, et ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa centripeta (per corol. 2. prop. iv.) in ratione composita ex ratione simplici radii *TP* directe et ratione duplicata temporis periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis *KL*; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius *TP*, augeri, idque in subduplicata ratione, qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquiplicata, (per corol. vi. prop. iv.) (z). Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus *P* minus semper et minus attractum perpetuo recederet longius a centro *T*; et contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui *S*, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius *TP* per vices; et tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione cempofita ex ratione sesquiplicata radii, et ratione subduplicata, qua vis illa centripeta corporis centralis *T*, per incrementum

(y) 164. Vis *LM* qua corpus *P* ad centrum *T* impellitur maxima est circa quadraturas, minima in syzygiis. Motus vero, qui in corpus *P* per vim addititiam circa quadraturas imprimitur, faciet ut corpus accedat versus centrum usque ad syzygias: retinet enim corpus motum impressum, usque dum vis ablatitia tollat hunc motum, novumque imprimat in contrariam partem; deinde corpus recedet iterum a syzygiis ad quadraturas.

(z) 165. Vis acceleratrix est ut vis absoluta directè et quadratum distantiæ inverse: quoniam vero vis acceleratrix est ut radius directè et quadratum temporis periodici inversè, (ponendo *A* pro vi acceleratrici, *V* pro vi absolutâ, *R* pro

tum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam, quod ellipseos a corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur et regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, et per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM et vi centripeta, qua corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, si augeatur distantia PT, augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, et vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, ideoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiæ PT ([a]), et propterea (per corol. 1. prop. XXX.) efficit ut aux, seu apsis summa, regrediatur ([b]). In conjunctione vero et oppositione vis, qua

pro radio, et P pro tempore periodico) erit $\frac{V}{R^2} = \frac{R}{P^2}$; et $P^2 = \frac{R^3}{V}$; ideoque $P = \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V}}$.

166. Hinc patet menses lunares hybernos æstivis esse longiores; quoniam enim in tempestate hybernâ tellus in perihelio versatur, magis diminuitur vis gravitatis quâ cum luna ad centrum telluris tendit quam in æstate, et proinde dilatatur orbita lunaris: tempus igitur periodicum lunæ augetur in sesquiplicatâ ratione distantiæ auctæ, et in inversâ subduplicatâ vis gravitatis diminutæ.

([a]) 167. Si, crescente distantiâ, addatur vis, quæ variatur in inversâ duplicatâ ratione distantiæ, vi varianti in eâdem ratione, summa harum virium decrescet in eâdem illâ ratione duplicatâ. Si vero, crescente distantiâ, addatur vis quæ crescit ut distantia, summa major erit quàm in priori casu; non tanto igitur decremento diminuta, decrescet summa in minori quàm duplicatâ ratione distantiæ.

([b]) 168. Vis centrifuga in omni orbitâ variatur inversè ut cubus distantiæ (127); si vero corpus descendere incipiat, in quâcunque demum ratione fingatur crescere vis centrifuga, corpus nunquam ascendere incipiet donec ad apsidem perveniat; conatur igitur perpetuò vis centrifuga corpus ad apsidem perducere: quò vero majus est discrimen inter variationem vis centrifugæ et vis gravitatis, eò citius vis centrifuga valebit ad corpus a centro repellendum, vel ad apsidem perducere, si unquam repellere vel ad apsidem perducere potest. Si vis gravitatis sit in inversâ duplicatâ ratione distantiæ, vis centrifuga valet ad corpus a centro repellendum postquam angulum graduum 180 descripserit:

Sectio Sexta. qua corpus P urgetur in corpus T, differentia eſt inter vim, qua corpus T trahit corpus P, et vim KL; et differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione diſtantiæ PT, decreſcit in majore quam duplicata ratione diſtantiæ PT (c), ideoque (per corol 1. prop. xxx.) efficit ut aux progrediatur (d). In locis inter ſyzygias et quadraturas (e) pendet motus augis ex cauſa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius exceſſu progrediatur ipſa vel regrediatur. Unde cum vis KL in ſyzygiis ſit quaſi duplo major quam vis LM in quadraturis, exceſſus erit penes vim KL, transferetque augem in conſequentia. Veritas autem hujus et præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo ſyſtema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c, in orbe ESE conſiſtentibus, undique cingi. Namque horum actionibus actio ipſius T minuetur undique, decreſcetque in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ.

Corol. 8.

rit: ſi vis gravitatis ſit in minori ratione, citius prævalebit vis centrifuga, et corpus ad apſidem perveniet in minori quàm dimidiâ revolutione. (Vid. 145.)

(c) 169. Vis, compoſita ex vi ablatitiâ quæ variatur directè ut diſtantia, et vi gravitatis quæ variatur inversè in ratione illâ duplicatâ, decreſcente diſtantiâ, plus augetur quàm ſi vis ablatitia eſſet inversè ut quadratum diſtantiæ; vis enim ablatitia quæ variatur inversè ut quadratum diſtantiæ magis augetur, decreſcente diſtantiâ, quàm ſi vis illa eſſet directè ut diſtantia; et contra.

(d) 170. Si vis centripeta ſit in majori quàm in inversâ duplicata ratione diſtantiæ, vis centrifuga in deſcenſu ad centrum difficilius gravitatem ſuperabit, nec valebit ad corpus a centro repellendum niſi poſt partem revolutionis pluſquam dimidiam; progrediuntur igitur apſides in plagam eandem quâ movetur corpus. (Vid. 145.)

(e) 171. LEMMA. *Sint* $a \pm b$ *et* a *duæ quantitates, quarum differentia* b *quàm minima eſt reſpectu quantitatum; erit* $2ab \pm b^2$, *differentia quadratorum harum quantitatum, ad* a^2, *ut* $2b$, *differentia bis ſumpta, ad* a. Nam $2ab : a^2 :: 2b : a$, et $2ab \pm b^2 = 2ab$ quamproximè, per hypotheſin; unde $2ab \mp bb : a^2 :: 2b : a$.

Tab. X. Fig. 79. 172. Si diſtantia mediocris SK ingens fuerit reſpectu radii TP, lineæ SL SM pro parallelis haberi poſſunt, et NM vel $TM = PL$. Sed ex conſtructione $SL : SK :: SK^2 : SP^2$, ideoque $SL : KL :: SK^2 : SK^2 - SP^2$; ſed per lemma $SK^2 : SK^2 - SP^2 :: SK$ vel $SL : 2PK$ quamproximè, quare $KL = 2PK$, et NM vel $PL = 3PK$.

173. Si igitur vis LM ſit ut PT, ML eſt ad NM ut ſinus totus ad triplum ſinum diſtantiæ angularis corporis P a quadraturâ proximâ.

Corol. 8. Cum autem pendeat apſidum progreſſus vel regreſſus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione diſtantiæ *TP*, in tranſitu corporisab apſide ima ad apſidem ſummam; ut et a ſimili incremento in reditu ad apſidem imam; atque ideo maximus ſit ubi proportio vis in apſide ſumma ad vim in apſide ima maxime recedit a duplicata ratione diſtantiarum inverſa: manifeſtum eſt quod apſides in ſyzygiis ſuis, per vim ablatitiam *KL* ſeu *NM*—*LM*, progredientur velocius, inque quadraturis ſuis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem vero temporis, quo velocitas progreſſus vel tarditas regreſſus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. *S*i corpus aliquod, vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in ellipſi; et mox, in deſcenſu ab apſide ſumma ſeu auge ad apſidem imam, vis illa per acceſſum perpetuum vis novæ augeretur in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ diminutæ: manifeſtum eſt quod corpus, perpetuo acceſſu vis illius novæ impulſum ſemper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam ſi urgeretur vi ſola creſcente in duplicata ratione diſtantiæ diminutæ; ideoque orbem deſcriberet orbe elliptico interiorem, et in apſide ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, acceſſu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in receſſu corporis ab apſide ima ad apſidem ſummam, decreſceret iiſdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad diſtantiam priorem, ideoque ſi vis decreſcat in majori ratione, corpus jam minus attractum aſcendet ad diſtantiam majorem et ſic orbis excen-

174. Cum vero *LM* ſeu vis addititia eſt ubique ut radius *PT*, eſt vis ablatitia in ſyzygiis ad vim addititiam in quadraturis ut $3PT - PT$ ad *PT*, ſeu ut 2 ad 1; nam in ſyzygiis $3PK = 3PT$.

175. Si quæratur locus inter quadraturas et ſyzygias in quo vis ablatitia et vis addititia ſunt æquales, fiat $Pm = 3PK$, et reſolvatur hæc in duas *mn* et *Pn*, quarum *Pn* ſit radio *PT* æqualis: erit, (ob ſimilia triangula *Pmn*, *TPK*,) *Pm* ceu $3PK : Pn$ ceu $PT :: PT : PK$; quare $3PK^2 = PT^2$, et $PT : PK :: \sqrt{3} : 1$, ceu ut 1732 ad 1000; in quo caſu angulus $PTC = 35° 26'$ circiter.

centricitas adhuc magis augebitur. Quare ſi ratio incrementi et decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper excentricitas; et contra, diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat (f). Jam vero in ſyſtemate corporum *T*, *P*, *S*, ubi apſides orbis *PAB* ſunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima eſt, et maxima fit ubi apſides ſunt in

(f) 176. Fingamus vim addi quæ variatur ut diſtantia a centro, ſumma variabitur in minori quam duplicata ratione diſtantiæ (167), corpuſque ad diſtantiam ſuam minimam vel apſidem perveniet, priuſquam angulum 180 graduum confecerit (168); ſin fingatur vis additiia variari inverſe ut diſtantiæ quadratum, corpus ad apſidem perveniet, poſtquam angulum graduum 180 deſcripſerit; quoniam vero tempora perveniendi ad apſidem in utroque caſu æqualia ſunt, viriumque centripetarum ſumma in poſteriori caſu major eſt quam in priori, conſtat eorundem effectum in apſidibus imis, vel effectum in æqualibus temporibus productum, majorem eſſe quando virium centripetarum ſumma major evadat; hoc eſt, diſtantia a foco in apſide ima minor erit ſi vis addititia creſcat ut diſtantiæ quadratum inverſe, quam ſi in directa ratione diſtantiæ creſcere ponatur. Deſcribatur ellipſis, cujus diſtantia maxima eſt diſtantia corporis in orbita ab apſide ſumma, et minima, diſtantia ab apſide ima, quando vis addititia ut diſtantia creſcit, ut inveniatur orbitæ mobilis forma; et patebit excentricitatem hujuſce ellipſeos minorem eſſe excentricitate illius, quæ deſcribitur vi creſcente in inverſâ duplicatâ ratione diſtantiæ.

Addatur vis, quæ variatur in majori quam inverſâ duplicata ratione diſtantiæ, corpuſque angulum majorem angulo graduum 180 deſcribet, et ad minorem diſtantiam deſcendet, priuſquam ad apſidem vis centrifuga perducere potis ſit, ob ſummam virium centripetarum in hoc caſu majorem (170). Capiatur ut prius diſtantia ab apſide ſumma, et diſtantia ab apſide imâ, et his diſtantiis deſcribatur ellipſis, ut inveniatur orbitæ mobilis forma, et excentricitas hujuſce ellipſeos major erit quam prioris.

Auferatur vis creſcens in ratione pluſquam duplicata diſtantiæ, reſiduum variabitur in minori quam inverſâ duplicata; vel vis, ſi corpus deſcendere incipiat, minor erit quam ſi ſubtrahatur vis, quæ eſt inverſe ut quadratum diſtantiæ; et proinde corpus ad apſidem perveniet angulo 180 *gr.* nondum deſcripto. Et diſtantia ejus ab apſide major erit quam ſi ſubtraheretur vis creſcens in duplicata ratione diſtantiæ. Deſcribatur igitur ellipſis, cujus diſtantia maxima eſt diſtantia corporis in orbitâ ab apſide ſummâ, et minima, diſtantia ab apſide imâ, ut inveniatur orbitæ mobilis forma, et excentricitas minor erit quam in orbita, quæ deſcriberetur ſi vis ablatitia in ratione duplicatâ diſtantiæ creviſſet.

Sit vis ablatitia in minore quam duplicata ratione diſtantiæ inverſâ, vel ut ipſa diſtantia creſcat, et reſiduum erit majus quam in caſu priori, et in ratione majori variabitur; corpuſque hâc vi agitatum orbitam deſcribens, cujus apſides in conſequentiâ feruntur, propius accedet ad centrum, priuſquam illud vis centrifuga

in ſyzygiis ([g]). Si apſides conſtituantur in quadraturis, ratio prope apſides minor eſt et prope ſyzygias major quam duplicata diſtantiarum, et ex ratione illa majori oritur augis motus directus uti jam dictum eſt. At ſi conſideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progreſſu inter apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in apſide ima eſt ad vim in apſide ſumma

trifuga ad apſidem perducere potis ſit. Deſcribatur ut prius ellipſis diſtantiis ab apſidibus pro maximâ et minimâ diſtantiâ, ut inveniatur orbitæ mobilis forma, et excentricitas hujuſce ellipſeos major erit quam in caſu priori.

Attamen notandum eſt, nos non comparare orbitam, quæ vi addititiâ vel ablatitiâ deſcribetur, cum orbitâ quæ deſcriberetur nulla vi addititia vel ablatitiâ agente: ſolummodo vero comparamus orbitam, quæ deſcribitur vi addititia vel ablatitia variantibus in minori quam duplicata ratione inversâ, cum orbitis quæ viribus addititiis vel ablatitiis, in ratione duplicata vel pluſquam duplicata inversâ creſcentibus, deſcriberentur; et ex præmiſſis conſequitur, excentricitatis mutationem eo eſſe majorem vel minorem, quo magis vel minus vires ablatitiæ et addititiæ ſummam vel reſiduum virium centripetarum ab inverſa duplicata ratione diſtantiæ recedere cogant. Si enim excentricitas orbitæ, quæ deſcribitur vi ablatitia varianti ut diſtantia, major ſit quam ſi vis illa ablatitia foret in inverſa duplicata ratione diſtantiæ; patet, quo magis vis ablatitia vim centripetam ab inversâ duplicata ratione diſtantiæ recedere cogat, eo majorem eſſe excentricitatis variationem; vel ut Newtoni verba uſurpemus, ſi ratio incrementi et decrementi ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur excentricitas; et contra, diminuetur eadem, ſi ratio illa decreſcat.

([g]) 177. Quandocunque apſides in quadraturis conſtituuntur, lex vis centripetæ ab inversâ duplicatâ ratione diſtantiæ minus deflectit, quam in alio quocunque eorum ſitu. Attamen quamvis in hoc caſu vis centripeta in majori quam inversâ duplicatâ ratione diſtantiæ augeatur in deſcenſu corporis ab apſide ſumma ad apſidem imam, et exinde ſequatur apſides etiam nunc, motu ſcilicet lentiſſimo, progredi debere (170), atque excentricitatem majorem fieri quam ſi vis in ipsâ duplicatâ ratione variaretur; conſtat tamen, vim centripetam minus ab hac lege deflectere in hoc apſidum ſitu, quam in alio quolibet; ideoque (quoniam excentricitas ex variatione vis pendeat per not. 176) excentricitatem magis magiſque augeri prout apſides a quadraturis recedunt. Hæc a Newtono ſic demonſtrari videntur. Patet in cor. VII. vim KL in ſyzygiis quaſi duplo majorem eſſe vi LM in quadraturis, ideoque exceſſum earum virium ſemper eſſe verſus vim KL, reſiduumque vis centripetæ et hujuſce exceſsûs, in tranſitu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam, eſſe in majori quam inversâ duplicata ratione diſtantiæ. Quum igitur vis centripeta ab inversâ duplicata ratione in ullo apſidum ſitu deflectit, oſtendendum eſt, eam minus in hoc apſidum ſitu ab eâ lege deflectere, quam in ullo alio: ſubtrahamus ſigillatim vires addititias a viribus ablatitiis in diverſis

Sectio Sexta.

summa in minore quam duplicata ratione distantiæ apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico: et contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside ima est ad vim in apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, et vires KL in syzygiis subductæ a viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi et incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: et propterea in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias perpetuo augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuo diminuitur, et excentricitatem diminuit.

Corol. 10. ([h]) Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis EST immobile manere; et ex errorum exposita

diversis revolutionibus, et patet differentiam earum esse minimam in eâ revolutione, in qua vires addititiæ maximæ evadunt viresque ablatitiæ minimæ; et satis quoque constat, deflectionem vis centripetæ a ratione duplicata esse in eâ revolutione minimam. Vires autem addititiæ tum sunt maximæ, cum in semirevolutione ab apside summâ ad apsidem imam vis ab inversâ duplicatâ ratione distantiæ longissime recedit, *i.e.* in apsidum quadraturis; ibi enim, si in hoc transitu consideretur ratio totius incrementi vel decrementi, â vi centripetâ et vi addititia oriunda, minor ea evadit quam in inversâ duplicatâ ratione distantiæ; aberratio tamen ab eâ ratione major erit, quo distantiarum inæqualitas fit major. Similiter si in eodem transitu consideretur ratio incrementi, a vi centripetâ et vi ablatitiâ oriunda, hæc major evadit quam in inversâ duplicatâ ratione distantiarum; atque aberratio ab eâ ratione nunc quoque major erit, quo distantiarum inæqualitas fit major. His præmissis facile constat, quoniam vires addititiæ maximæ sunt, viresque ablatitiæ minimæ, quando apsides in quadraturis locantur, differentiam earum in hoc situ, ob causas utrasque, minimam esse; eandemque differentiam maximam esse, quando apsides in syzygiis constituantur, quoniam ibi vires addititiæ maximæ sunt, vires vero ablatitiæ minimæ; constat præterea rationem incrementi vel decrementi vis centripetæ augeri perpetuo, in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias, et in transitu a syzygias ad quadraturas diminui.

([h]) 178. Orbitam PAB linea nodorum in duos semicirculos dirimit, quorum uterque binas habet facies, alteras plano EST inclinatas, alteras reclinatas; et quanquam vis MN agit semper secundum rectas plano EST parallelas, dicemus tamen in sequentibus agere eam *ad* planum vel *a* plano EST, prout ab

expoſita cauſa manifeſtum eſt, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ ſunt cauſa illa tota, vis *ML* agendo ſemper ſecundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *NM*, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecundum idem orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero ſunt in quadraturis, eos maxime perturbat, corpuſque *P* de plano orbis ſui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in tranſitu (i) corporis a quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim eandem in tranſitu

ab *inclinatâ* vel *reclinatâ* facie immediate dirigatur. Dicemus etiam motum corporis *P* fieri *ad* planum vel *a* plano *EST*, prout corpus illud ad nodum proximum, vel a nodo proximo tendit. His præmiſſis effata quædam proferemus, quibus ad corollaria 10 et 11 aditus ampliſſimus pateat, quæ alias vix aut ne vix quidem intelligi poſſunt.

Reg. 1. Si vis *MN* et motus corporis *P* ejuſdem fuerint affectionis, *h. e.* ſi fiat uterque *ad* planum vel *a* plano *EST*, inclinatio orbitæ *PAB* ceu angulus inclinationis perpetuo augebitur, alias minuetur. Ex. gratia. Si corpus *P*, in linea *AT* deſcendens *ad* planum *ETe*, vel in lineâ *TA* aſcendens *a* plano *ETe*, trahatur vi *Aa* vel *Tt*, quæ *ad* planum vel *a* plano dirigitur, completo parallelogrammo *AatT* diagonalis *At* vel *Ta* magis inclinatur verſus planum *ETe*, quam *AT*; id eſt, angulus *ABe* vel *aTe* major eſt quam *ATe*, ceu angulus inclinationis augetur. Si autem corpus, in lineâ *AT* deſcendens *ad* planum vel in lineâ *TA* aſcendens *a* plano, trahatur vi *Aa* vel *Tt*, angulus *ABe* in primo caſu minor eſt quam *ATe*, et in ſecundo *aTe* minor quam *ATe*, ceu angulus inclinationis minuitur. Tab. X. Fig. 80, 81. Fig. 82, 83.

Reg. 2. Vis *MN* et motus corporis *P* ejuſdem ſunt affectionis in locis orbitæ *PAB* oppoſitis, et propterea quicquid præſtant in uno ſemicirculo idem præſtabunt in altero; patet per not. 161.

Reg. 3. Linea quadraturarum fertur in conſequentia eadem velocitate cum lineâ ſyzygiarum, idque ſive motus iſte motui corporis *S* circum *T* vel *T* circum *S* debeatur.

Reg. 4. Inter quadraturas et nodum proximum vis *MN* agit *a* plano *EST* aliis in locis *ad* planum: — nam inter quadraturas et nodum proximum a *reclinata* facie dirigitur, aliis in locis ab *inclinata*.

Reg. 5. Si vis *MN* agat *ad* planum *EST* nodi regrediuntur, alias progrediuntur; ideoque per reg. 4. inter quadraturas et nodum proximum nodi progrediuntur, aliis autem in locis regrediuntur.

(i) 179. In tranſitu a quadraturis ad ſyzygias vis *MN* agit *ad* planum *EST*, corpus autem *P a* plano movetur, ideoque per reg. 1. angulus inclinationis minuitur; in tranſitu vero a ſyzygiis ad quadraturas, vis *MN* et motus corporis ejuſdem ſunt affectionis, ideoque angulus inclinationis augetur.

Sectio Sexta.

tranſitu a ſyzygiis ad quadraturas (k). Unde fit ut corpore in ſyzygiis exiſtente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. At ſi nodi conſtituantur in octantibus poſt quadraturas, id eſt, inter *C* et *A*, *D* et *B*, intelligetur ex modo expoſitis, quod, in tranſitu corporis *P* a nodo alterutro ad gradum inde nonageſimum, (l) inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in tranſitu per proximos 45 gradus, uſque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, et poſtea denuo in tranſitu per alios 45 gradus, uſque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, et propterea minor eſt ſemper in nodo ſubſequente quam in præcedente. Et ſimili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi ſunt in octantibus alteris inter *A* et *D*, *B* et *C*. Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima (m). In tranſitu eorum a ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos ap-

(k) 180. Hinc patet, longitudines heliocentricas planetarum in æqualibus a nodis diſtantiis non ſemper eaſdem manere, ſi ratio illarum habeatur in diverſis revolutionibus ejuſdem planetæ. Nam, ob actionem cæterorum, unuſquiſque planeta in limitibus ſuis modo proprius accedit ad eclipticam, modo longius a plano illo recedit.

(l) 181. Per hos 90° minuitur inclinatio quoniam vis *MN* agit *ad* planum, corpus autem *a* plano movetur (per reg. 1); ſed per proximos 45° augetur, quoniam vis et motus ejuſdem ſunt affectionis; ac denuo in tranſitu per alios 45° minuitur, quoniam motus corporis *P* eſt *ad* planum, vis vero *MN* agit *a* plano.

(m) 182. Si conſideratur effectus planetæ cujuſvis, motum aliorum in latitudinem perturbantis, patet, diſtantiam planorum in limitibus planetæ, cujus motus perturbatur, minimam fore, quando ipſe planeta, ſol, et planeta perturbans, in ſyzigiis ſuis, nodique in quadraturis verſantur. Idem etiam de ſole, motum lunæ in latitudinem perturbante, intelligendum eſt. Motus vero non omnino perturbabitur, ſi planeta perturbans in plano motus planetæ inferioris verſetur: hoc eſt, ſi nodi in ſyzigiis conſtituantur: eritque in hoc caſu, ſi lunæ motus conſideretur, heliocentrica latitudo, cæteris paribus, maxima. Quoniam vero, ob diverſum planetarum ſitum, alii alios ad planum eclipticæ attrahunt, dum alii illos a plano recedere cogant, eorundem effectus maximos, in ſyſtemate plurium corporum, non niſi calculo prælongo determinare licet.

appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, et corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat; nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur. SECTIO SEXTA.

Corol. 11. Quoniam corpus *P*, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuo trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus *S* in tranſitu ſuo a nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; et in contrariam partem in tranſitu a nodo *D* per oppoſitionem *B* ad nodum *C*: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo a nodo *C* corpus perpetuo recedit ab orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſime diſtans a plano illo primo *CD*, tranſit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuo recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia ([n]).

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis deſcripti errores ſunt paulo majores in conjunctione corporum *P*, *S*, quam in eorum oppo-

([n]) 183. Si nodi conſtituantur in quadraturis, vis *MN* trahens corpus *P* perpetuò de plano orbis ſui *CD* verſus planum orbis *EST*, faciet ut *P* citius perveniat ad planum *EST*, quàm ſi tali vi non omnino agitetur; tranſibit igitur per planum illud in nodo quod vergit in antecedentia nodi prioris *D*; et ſimili argumento recedent perpetuò nodi in oppoſitâ parte orbitæ (178. Reg. 25). Si conſtituantur nodi in octantibus inter *C* et *B*, *D* et *A*, regredientur per gradus 135 in tranſitu a *C* ad nodum proximum; deinde in tranſitu per gradus 45 a nodo ad quadraturam *D* progredientur; ſimiliter in oppoſitâ parte orbitæ regredientur perpetuò in tranſitu ipſius *P* per gradus 135, progredientur vero in tranſitu per alios 45: et exceſſu regreſſus ſuper progreſſum ſingulis revolutionibus ferentur in antecedentia. Si nodi ſint in ipſis ſyzygiis, vis *MN* agens in plano orbis *CAD*, nullos inducet errores in latitudinem; et nodi per totam revolutionem quieſcent, niſi quatenus declinant ab hoc ſitu ob motum corporis *S* circum *T*, vel *T* circum *S*: deinde recedent ſingulis revolutionibus, tardius quidem prope ſyzygias, velocius vero prope quadraturas.

SECTIO SEXTA. oppositione; idque ob majores vires generantes *NM* et *ML* (°).

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta statuitur magnitudo, ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *T* et *P* systema. Et ex aucto corpore *S*, auctaque ideo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *S* circum systema corporum *P* et *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproxime ut vis *SK* et ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*, tum corporis *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciproce; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum et effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum *T* et *P* systemate, et mutatis tantum distantia *ST* et vi absoluta corporis *S*, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *S*, et ratione triplicata inversa distantiæ *ST*. Unde si systema corporum *T* et *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*; vires illæ *NM*, *ML*, et earum effectus erunt (per corol. 2. et 6. prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis *S* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML*, et earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* spectati, et vice versa (p).

Nam-

(°) 184. Si orbita *PAB* circularis sit vel circulari finitimus, vis *LM* in conjunctione est ad vim eandem in oppositione in ratione triplicatâ distantiarum *SP* inversè. Nam (158) vis *LM* est ut $\frac{PT}{SP3}$; id est, datâ *PT*, ut $\frac{1}{SP3}$.

185. Vis *MN* in conjunctione est ad *MN* in oppositione, ut *SB* ad *SA*; in conjunctione enim $SM:ST::ST^2:SA^2$, ideoque *MT* vel $MN:ST::ST^2-SA^2:SA^2$ id est (171) $::2AT:SA$; in oppositione vero $ST:SM::SB^2:ST^2$, ideoque $ST:TM$ vel $MN::SB^2:SB^2-ST^2$ id est (171) ut $SB:2TB$; quare conjunctis rationibus *MN* in priori casu, est ad *MN* in posteriori, ut $2AT\times SB$, ad $2TB\times SA$, id est, ut $SB:SA$.

TAB. X. FIG. 84. * (p) 186. Quo melius intelligantur ea quæ in hoc corollario tradita sunt, longitudines *LM*, *MN*, quibus vires omnes perturbatrices corporis *P* exponuntur,

Namque hæ rationes eædem ſunt, atque ratio ſuperior compoſita. SECTIO SEXTA.

Corol. 15. Et quoniam ſi, manentibus orbium *ESE* et *PAB* forma proportionibus et inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, et ſi corporum *S* et *T* vel maneant, vel mutentur vires

ponuntur, primo ſunt inveſtigandæ. Nam ſi detur diſtantia *ST*, accipi poteſt longitudo *SK* æqualis ipſi *ST*; quo in caſu erit etiam *LM* in mediocri ſuâ quantitate æqualis diſtantiæ *PT*; ſin augeatur diſtantia *ST*, neceſſe erit ut minuatur longitudo *SK*; adeoque neque longitudines *SK*, *ST*, neque longitudines *LM*, *PT* amplius pro æqualibus habendæ ſunt, ſed eruenda eſt longitudo *LM* ex ſimilibus triangulis *SLM*, *SPT* per ſequentem analogiam, nempe $SP : PT :: SL : LM$, ideoque $LM = \frac{SL \times PT}{SP}$. Verum quoniam *SL* nunc major eſt, nunc minor quam *SK*, et ab eadem *SK* nunquam aberrat ſenſibiliter, exponatur *SL* per mediocrem ſuam quantitatem *SK*, et ſimiliter *SP* per *ST*, et prodibit longitudo $LM = \frac{SK \times PT}{ST}$.

Jam vero ut exquiramus longitudinem *MN*, jungatur *KN*, et ad rectam *ST* perpendiculares ducantur *LX*, *PI*, et ſi orbita *PAB* circularis ſit, vel propemodum circularis, æquales erunt *SK*, *SN*, et anguli *SKN*, *SNK* tantum non erunt recti propter angulum ad *S* tantum non evaneſcentem: quare rectæ *KN* et *LX* pro parallelis habendæ ſunt, ut et rectæ *KL*, *NX* pro æqualibus et parallelis: ſed et rectæ *SP*, *SI* erunt etiam æquales ob angulum ad *I* rectum; quare cum ſit $SK : SL :: SP^2 : ST^2$, erit etiam $SK : SL :: SI^2 : ST^2 :: SI : SI + 2IT$, et dividendo $SK : KL :: SI : 2IT$; prodit ergo *KL* vel $NX = \frac{SK \times 2IT}{SI} = \frac{SK \times 2IT}{ST}$. Rurſus, propter ſimilia triangula *SLM* et *SPT*, *LMX* et *PTI*, erit $MX : IT :: LM : PT :: SL : SP$; quare *MX* æquatur $\frac{SL \times IT}{SP} = \frac{SK \times IT}{ST}$; quare longitudo *MN* ſeu $MX + XN$ erit $\frac{SK \times 3IT}{ST}$. Et univerſaliter *LM* erit ad *MN*, ut radius ad triplum coſinus anguli *PTS*; et in dato ſitu corporum *S*, *T*, *P*, ad invicem, ubi eſt $3IT$ ut *PT*, ob datum ſpecie triangulum *PTI*, erit *MN* ut $SK \times \frac{PT}{ST}$; quare vis *LM* univerſaliter, et vis *MN* in integrâ revolutione corporis *P* circum *T*, eſt ut $SK \times \frac{PT}{ST}$.

His expeditis, ſit *V* vis abſoluta attractiva corporis *S*; et *SK* erit ut $\frac{V}{ST^2}$, ergo $SK \times \frac{PT}{ST}$, ſeu vires *LM*, *MN* erunt ut $V \times \frac{PT}{ST^3}$; unde in dato ſyſtemate cor-

SECTIO SEXTA.

vires in data quavis ratione; hæ vires (hoc eſt, vis corporis *T*, qua corpus *P* de recto tramite in orbitam *PAB* deflectere, et vis corporis *S*, qua corpus idem *P* de orbita illa deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, et eadem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles et proportionales ſint effectus omnes, et proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, et errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica (q).

Corol.

corporum *P*, *T*, erunt vires *LM*, *MN* ut $\frac{V}{ST^3}$. Sit jam *T* tempus periodicum corporis *T* circum *S*, et per corol. 2. et 6. Prop. 4. erit $\frac{V}{ST^2}$ ut $\frac{ST}{T^2}$, et $\frac{V}{ST^3}$ ut $\frac{1}{T^2}$; ergo in dato ſyſtemate corporum *P*, *T*, vires *LM*, *MN* ſunt reciproce ut quadratum temporis periodici ſyſtematis circum *S* revolventis. Poſtremo, ſit *D* diameter corporis *S*, et diameter ejus apparens ex centro *T* ſpectata erit ut $\frac{D}{ST}$, et cubus diametri apparentis ut $\frac{D^3}{ST^3}$. Sunto *V* et D^3 ſemper proportionales, hoc eſt, magnitudo corporis *S* et vis abſoluta attractiva vel maneant vel mutentur proportionaliter, eritque $\frac{V}{ST^3}$ ut $\frac{D^3}{ST^3}$; hoc eſt, vires *LM*, *MN* erunt ut cubus diametri apparentis corporis *S* ex centro *T* ſpectatæ.

* (q) 187. Sit *V* vis attractiva corporis *S*, *v* vis attractiva corporis *T*, *D* diameter orbitæ corporis *T* circum *S* revolventis, *d* diameter orbitæ *PAB*, *T* tempus periodicum corporis *T* circum *S*, *t* tempus periodicum corporis *P* circum *T*, et per *Cor.* 2. *Prop.* 4. erit $\frac{D}{T^2}$ ut *V*, et $\frac{D}{V}$ ut T^2; unde erit $T^2 : t^2 :: \frac{D}{V} : \frac{d}{v} :: Dv : Vd$, hoc eſt, T^2 erit ad t^2 in ratione compoſitâ ex ratione *D* ad *d* et ratione *v* ad *V*. Manente orbium proportione mutentur eorum magnitudines, et vel maneant vel mutentur proportionaliter vires *V* et *v*, et propter ſervatas rationes componentes inter *D* et *d*, et *v* et *V*, ſervabitur ratio compoſita inter T^2 et t^2, eritque *T* ad *t* in eâdem ratione quâ prius. Tangat jam recta *PR* orbitam *PAB* in loco *P*; et in loco proximo *Q* age *QR* diſtantiæ *PT* parallelam, et quo tempore corpus *P* ſola vi inſita percurreret tangentem *PR*, vel addita vi *v* percurreret arcum quam minimum *PQ*, eodem tempore idem *P* totis viribus *LM*, *MN* et *v* percurrat arcum *Px*, et lineola *Qx* erit effectus virium *LM*, *MN*.

Manentibus

Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium forma et inclinatio ad invicem, et mutentur utcunque corporum magnitudines, vires et diſtantiæ; ex datis erroribus et errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores et errorum tempora in alio quovis, quam proxime ([r]): ſed brevius hac methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris

Manentibus orbium formâ, proportione, et inclinatione ad invicem, mutentur eorum magnitudines, ut et magnitudo arcus *PQ* in eâdem ratione, et vires *V* et *v* vel maneant, vel mutentur etiam in datâ aliquâ ratione. Detur poſtremo ſitus tum orbitarum ad invicem, tum corporum *S*, *T*, *P*, in his orbitis, atque ob datum et ſitu et ſpecie triangulum *SPT*, et datam rationem virium, lineola *Qx* ſemper erit ſimiliter ſita quoad hoc triangulum. Erunt etiam in hoc caſu vires *LM*, *MN* ut vis *v*, et lineola *Qx* ut lineola ſimul genita *QR*, et errores omnes ex lineolâ *Qx* oriundi, ut *Qx* vel *QR*, vel ut diametri orbitarum; atque adeo reddentur proportionales. Denique ob datam rationem inter arcum *PQ* et totam orbitæ *PAB* perimetrum, tempus quo generatur *Qx* erit ut tempus periodicum corporis *P* circum *T*, vel corporis *T* circum *S*. Sunt itaque errores ſimiles lineares ut orbitarum diametri, et propterea errores angulares ex centro *T* ſpectati æquales; et errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora ſunt ut tempora periodica.

*([r]) 188. Sit *T* tempus periodicum telluris noſtræ circa ſolem, *t* tempus periodicum lunæ circa centrum telluris, *R* tempus periodicum jovis circa ſolem, *r* tempus periodicum ſatellitis alicujus circum-jovialis circa centrum jovis, et propoſitum ſit errores omnes ſatellitis ex analogis erroribus lunaribus ope Corol. 14. et 15. derivare.

Manentibus orbita et tempore periodico ſatellitis, deturbetur *Jupiter* de loco ſuo, et ſtatuatur ad diſtantiam a ſole, quæ ſit ad diſtantiam ſatellitis a centro jovis, ut diſtantia terræ noſtræ a ſole ad diſtantiam lunæ a centro terræ.

Sit *S* tempus periodicum jovis circa ſolem ad hanc diſtantiam revolventis, eritque per Corol. 15. $r : S :: t : T$; unde $\frac{r}{S} = \frac{t}{T}$, et $\frac{rr}{SS} = \frac{tt}{TT}$. Jam vero ex Corol. 15. manifeſtum eſt errores omnes in motu ſatellitis tempore *r* commiſſos, æquales eſſe erroribus ſimilibus in motu lunæ commiſſis tempore *t*. Referat itaque $\frac{tt}{TT}$ quantitates errorum periodicorum lunarium, et huic æqualis $\frac{rr}{SS}$ exhibebit errores analogos æquales in motu ſatellitis. Reſtituatur jam jupiter in locum proprium, et per Corol. 14. mutabuntur quantitates errorum in reciprocâ duplicatâ ratione temporis periodici jovis circa ſolem, hoc eſt, in ratione $\frac{1}{SS}$ ad $\frac{1}{RR}$: quare $\frac{rr}{RR}$ jam exponet quantitates errorum ſatellitis, hoc eſt, errores periodici ſatellitis erunt ad errores analogos lunares ut $\frac{rr}{RR}$ ad $\frac{tt}{TT}$.

Sectio Sexta.

teris ſtantibus, ſunt ut radius TP (s), et harum effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires et quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis P; et hinc errores angulares e centro T ſpectati (id. eſt, tam motus augis et nodorum, quam omnes in longitudinem et latitudinem errores apparentes) ſunt, in qualibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii xiv. et in quolibet corporum T, P, S ſyſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, et T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directe et quadratum temporis periodici corporis T inverſe. Et inde motus medius augis erit in data ratione ad motum medium nodorum; et motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directe et quadratum temporis periodici corporis T inverſe (t). Augendo vel minuendo excentricitatem et inclinationem orbis PAB non mutantur motus augis et nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major ſit nunc minor quam radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum PT; et erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Eſt autem vis mediocris SN vel ST, qua corpus T retinetur in orbe ſuo circum

* (s) 189. Nam vires LM, MN ſunt ut $\frac{SK \times PT}{ST}$, ſed ſi detur ST, dabitur SK ob datam vim abſolutam corporis S, quo in caſu dabitur $\frac{SK}{ST}$, et vires LM, MN erunt ut PT.

* (t) 190. Motus periodici ſunt qui ſpatio unius revolutionis peraguntur, adeoque ſunt ut motus contemporanei et tempora periodica conjunctim; unde fit ut motus contemporanei ſint ut motus periodici directè, et tempora periodica inversè. Sed motus periodici ſunt ut $\frac{tt}{TT}$, ergo motus contemporanei erunt ut $\frac{t}{TT}$.

circum S, ad vim, qua corpus P retinetur in orbe suo circum T, in ratione composita ex ratione radii ST ad radium PT, et ratione duplicata temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S. Et ex æquo, vis mediocris LM ad vim, qua corpus P retinetur in orbe suo circum T (quave corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam PT revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum ([u]). Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia PT, datur vis mediocris LM; et ea data, datur etiam vis MN quamproxime per analogiam linearum PT, MN. ([v])

Corol.

([u]) 191. Sit V vis attractiva corporis S, v vis attractiva corporis T; sit T tempus periodicum corporis T circum S; t tempus periodicum corporis P circum T; et erit vis mediocris $LM : V :: PT : ST$; sed $V : v :: \frac{ST}{T^2} : \frac{PT}{t^2}$; unde est vis mediocris $LM : v :: \frac{PT \times ST}{TT} : \frac{PT \times ST}{tt} :: \frac{1}{TT} : \frac{1}{tt} :: tt : TT$.

([v]) 192. THEOREMA. *Motus omnes lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis principiis consequi.* Planetas majores, interea dum circa solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes planetas deferre, et minores illos in ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. xxxvii. Actione autem solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in luna nostra notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, et 5. hujusce prop.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto describit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram in syzygiis quam in quadraturis, nisi quatenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per corol. 9.) ubi apogæum lunæ in syzygiis versatur, et minima ubi idem in quadraturis consistit; et inde luna in perigæo velocior est et nobis propior, in apogæo autem tardior et remotior in syzygiis quam in quadraturis. Progreditur insuper apogæum, et regrediuntur nodi, sed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. et 8.) velocius progreditur in syzygiis suis, tardius regreditur in quadraturis, et excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per corol. 11.) quiescunt in syzygiis suis, et velocissime regrediuntur in quadraturis. Sed et major est lunæ latitudo maxima in ipsius quadraturis (per corol. 10.) quam in syzygiis: et motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6.) quam in ipsius aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab astronomis notatæ.

Sunt

SECTIO SEXTA.

Corol. 18. Iisdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; et singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis

Sunt etiam aliæ quædam a prioribus astronomis non observatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi et nodorum lunæ, et eorundem æquationes, ut et differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis et minimam in quadraturis, et inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14.) in triplicata ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per corol. 1, et 2. lem. x. et corol. 16. hujusce prop.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, et cum ea confundi.

193. PROBLEMA. *Motus inæquales satellitum jovis et saturni a motibus lunaribus derivare.* Ex motibus lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici terræ circa solem ad tempus periodicum jovis circa solem, et ratione simplici temporis periodici satellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16.); ideoque annis centum conficit nodus iste 8 *gr.* 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) et inde dantur. Motus autem augis satellitis cujusque in consequentia est ad motum nodorum ipsius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ nostræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) et inde datur. Diminui tamen debet motus augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat (Vid. Cor. 8.). Æquationes maximæ nodorum et augis satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas nodorum et augis lunæ respective, ut motus nodorum et augis satellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum et apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum (Vid. Cor. 16.). Variatio satellitis e jove spectati, est ad variationem lunæ, ut sunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus satelles et luna ad solem revolvuntur, per idem corollarium; ideoque in satellite extimo non superat 5″. 12‴.

194. Hactenus satellitum motus descripsimus respectu ad plana quæ circa solem cum primariis suis deferuntur. Adjiciantur pauca de proprietatibus semitæ, quam satelles motu composito ex motu ejus circa primarium et primarii circa solem in plano immobili describit; posito quod motus satellitis circa primarium, et primarii circa solem fiant uniformiter in circulis in eodem plano jacentibus.

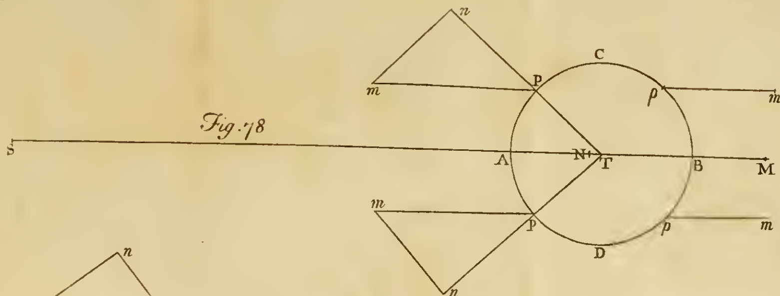


Fig. 78

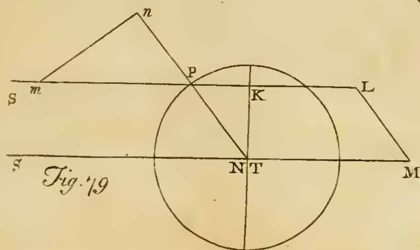


Fig. 79

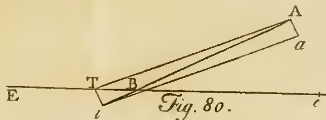


Fig. 80.

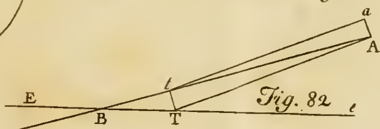


Fig. 82

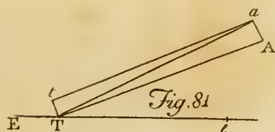


Fig. 81

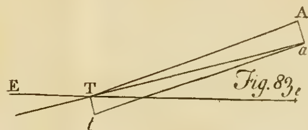


Fig. 83

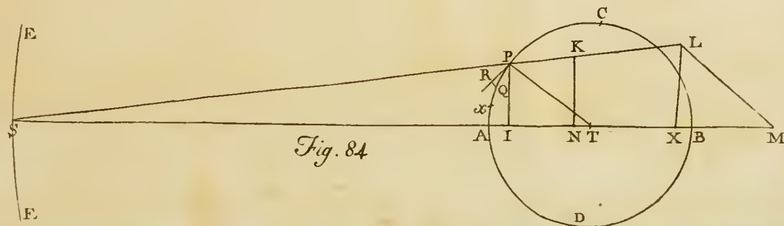


Fig. 84

poris *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, et celerius movebuntur in conjunctione et oppoſitione ipſarum et corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, quieſcent in ſyzygiis; extra ſyzygias vero movebuntur in antecedentia, et velociſſime quidem Sectio Sexta.

jacentibus. Sit *S* ſol, *Aa* orbita primarii, et *LxL* orbita ſatellitis circa primarium deſcripta; centro *S* et radio *SL*, cum ſatelles *L* ſit in conjunctione, deſcribatur arcus circuli *Ll*; et ſi linea *Ll* æqualis ſit peripheriæ orbitæ ſatellitis, et tempus ſynodicæ revolutionis ſatellitis, vel tempus quod labitur inter duas conjunctiones proximas, ſit æquale tempori quo deſcribit primarius lineam *Aa*, quæ eſt ad peripheriam orbitæ ſatellitis ut *SA* ad *SL*, patet ſemitam ſatellitis eſſe epicycloidem, a puncto quovis in peripheria circuli *Lx* deſcriptam, interea dum circulus ille *Lx* ſuper baſim circularem *Ll* revolvitur. Quod ſi tempus ſynodicæ revolutionis ſatellitis non tale ſit, erit ſemita ejus epicyclois quædam deſcripta a puncto *L* in plano circuli cujuſdam dati, interea dum circulus ille ſuper alium quendam circularem baſim revolvitur, cujus proprietates a ſignentibus theorematis innoteſcunt. Tab. XI. Fig. 85.

195. THEOREMA. I. *Diameter circularis baſis SE eſt ad diametrum circuli revolventis EA, ut tempus periodicum primarii circa ſolem, ad tempus ſyncdicum ſatellitis circa primarium.* Tab. XI. Fig. 86.

Dem. Sit enim *T* tempus periodicum primarii circa ſolem, et *t* tempus ſynodicum ſatellitis circa primarium, hoc eſt, tempus quod, ob motum compoſitum ſatellitis circa primarium et primarii circa ſolem, labitur inter duas proximas conjunctiones: ſit *S* ſol, *Aa* orbita primarii circa ſolem, *CL* orbita mobilis ſatellitis *L* circa primarium *A*; et centris *S* et *A* deſcribantur circuli *EeZ*, *EMF* tales, ut dum circulus *EMF* ſuper *EeZ* revolvatur, centro ejus movente cum velocitate quam habet primarius in orbitâ ſuâ, punctum *L* in plano circuli revolventis veram deſcribat ſemitam ſatellitis in plano immobili: deſcribat jam primarius arcum *Aa*, et ſumatur $er = EM$, et $mr = eE$; et ſatelles *L* deſcribet interea arcum *rm* æqualem arcui *Ee*: eſt igitur angulus *ram*, quem ſatelles circa primarium revera deſcribit, ad angulum *ESe* vel *ASa*, quem primarius circa ſolem interea deſcribit, ob æquales arcus ſubtendentes, inversè ut radius *ar*, vel *AE*, ad *ES*: tempora vero *T* et *t* ſunt inverſe ut angulares velocitates; ergo erit $T : t :: ES : EA$. Q.E.D.

196. *Cor.* 1. Hinc ſequitur eſſe $AS : AE :: T + t : t$, hoc eſt, ut tempus periodicum primarii ad tempus periodicum ſatellitis.

197. *Cor.* 2. Quoniam circulus *EMF* circa punctum *E* revolvat, erit directio tangentis, in quâ movetur perpetuò ſatelles, ipſi *EL* perpendicularis: et velocitas ſatellitis ad uniformem velocitatem primarii, ut *EL* ad *EA*.

198. THEOREMA. II. *Capiatur* AB *ipſis* AS *et* AE *tertia proportionalis*; *ſuper* EB *deſcribatur ſemicirculus* BKE, *occurrens lineæ* EL *in* K; *et producatur* LE *ad punctum* O, *ita ut* LK *ſit ad* LE, *ut* LE *ad* LO, *erit* LO *radius oſculi ad punctum ſemitæ* L.

SECTIO SEXTA. quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, et axis ejus ſingulis revolutionibus oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur.

Corol.

DEM. Quoniam LE et le perpendiculares ſint ſemitæ in L et l, et productæ occurrant in O, ultima earum interſectio centrum erit curvaturæ. Ducatur qe, quæ producta occurrat LE in V, et jungatur VS; patet angulum $SeV = qea = LEA = SEV$, ideoque angulum $eVE = eSE$, et $EVS = EeS$: ergo SV eſt ultimo ad EV perpendicularis, et $EV : EK :: ES : EB :: AS : AE$; ultimo autem angulus EOe eſt ad angulum EVe (ſeu ESe) ut EV ad EO; hoc eſt, ut $EV \times AE$ (ſeu $EK \times AS$) ut ad $EO \times AE$. Motus angulares linearum LE et EA in ſtatu naſcenti æquantur, ideoque angulus $LEl = AEa$. Ultimo angulus EOe eſt ad angulum LEl ut LE ad LO, et LEl (ceu AEa): $ESe :: AS : AE$, ergo eſt $EOe : ESe :: AS \times LE : AE \times LO$. Sed ex præmiſſis $EOe : ESe :: EK \times AS : EO \times AE$; ergo $EK \times AS : EO \times AE :: AS \times LE : AE \times LO$, unde $EK : EO :: LE : LO$, ideoque $LO : LE :: LE : LK$ convertendo et dividendo. Q. E. D.

199. *Cor.* 1. Si AB major ſit quam AC, LK et LO ad eandem puncti L partem jacebunt, ideoque ſemita Ll erit ubique verſus S concava. Si $AB = AC$, tum in conjunctione evaneſcit curvatura; et ſemita punctum rectitudinis habet. Sin AB minor ſit quam AC, circulis CLD et BKE ſeſe jam interſecantibus, portio quædam ſemitæ, quæ prope conjunctionem eſt, convexa erit verſus S; atque interſectionum loca puncta erunt contrariæ flexuræ.

200. *Cor.* 2. Ex hypotheſi $AE : AS :: p : P$ (poſitis p et P pro temporibus periodicis ſatellitis et primarii) ergo $AB : AS :: p^2 : P^2$. In caſu lunæ noſtræ $p^2 : P^2 :: 1 : 178$, et $AB = \frac{1}{178} \times AS$; ſed $AC = \frac{1}{337} \times AS$ quamproximè, ideoque cum AB major ſit quam AC, orbita lunaris eſt ubique verſus ſolem concava.

201. THEOREMA. III. *Iiſdem poſitis, exprimatur gravitas primarii verſus ſolem per* BA; *et vis, quâ retinetur ſatelles in ſemitâ ſuper planum immobile deſcriptâ, exprimetur per* LB, *et tendet ad punctum* B.

Dem. Componi enim intelligatur vis illa a duabus aliis, quarum una agit in directione LO ad ſemitam perpendiculari, altera vero in directione tangentis ſemitæ: et quoniam vires, quibus corpora in curvas quaſcunque deflectuntur, ſunt ut quadrata velocitatum directè, et ut chordæ illæ curvaturæ quæ per centra virium tranſeunt inversè (42), erit vis prior, quæ agit in directione ad ſemitam perpendiculari ad vim gravitatis primarii verſus ſolem, ut $\frac{EL^2}{LO}$ ad $\frac{EA^2}{AS}$, hoc eſt, ut LK ad AB (198): gravitate igitur primarii dictâ AB, vis prior

tellitis

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materia non fluida conſtantem, ampliari et extendi uſque ad hunc annulum, et alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem ſuum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus et retardatus (ut in ſuperiore corollario) in ſyzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam ſuperficies globi, SECTIO SEXTA.

ſatellitis recte exprimitur per LK. Vis altera quæ in ſatellitem in directione tangentis agit, atque accelerat vel retardat motum ejus, eſt ut incrementum velocitatis directè, et ut incrementum temporis inverſe; incrementum temporis eſt ut incrementum ſpatii directè, et ut velocitas inversè, *i.e.* ut $\frac{Aa}{EA} = \frac{Ee}{EB} = \frac{rm}{EB} = \frac{lq \times AE}{EB \times AC} =$ (ſi *an* et *qu* ſint perpendiculares ad *en* et *el* in *n* et *u*, et proinde $lq : lu :: ac : an :: AC : AN) = \frac{AE \times lu}{EB \times AN} = \frac{lu}{BK}$: eſt autem lu incrementum velocitatis; et proinde eſt vis ut lu directè, et ut $\frac{lu}{BK}$ inversè, hoc eſt, directe ut BK. Quoniam igitur vis in directione LO agens exprimatur per LK, et vis altera in directione tangentis per BK, vis ex his compoſita rectè exprimetur per LB, et a puncto L ad punctum B tendet. Q. E. D.

202. *Cor.* 1. Si LH ſit æqualis et parallela AB, et ſi compleatur parallelogrammum $LABH$, vis LK componi poteſt ex viribus LH et LA, quarum una LH parallela eſt et æqualis ipſi AB, quæ exprimit gravitatem primarii verſus ſolem, altera vero LA ad primarium tendit, et æqualis eſt gravitati quâ ſatelles circulum circa primarium ſuum deſcriberet in eodem tempore periodico p, ſi nulla eſſet actio ſolis; eſt enim gravitas illa ad AB gravitatem primarii circa ſolem, ut $\frac{AL}{AE^2}$ ad $\frac{AS}{AS^2}$, vel ut AL ad $\frac{AE^2}{AS} = AB$.

203. *Cor.* 2. Hinc ſequitur, omnem vim perturbatricem ſolis in ſatellitem oriri, vel ex inæqualitate actionis ejus in ſatellitem et primarium, vel ex obliquitate directionis: nam ſi ſatelles trahatur verſus ſolem vi LB æquali et parallelâ vi AB, quâ agitatur primarius, revolvet circa primarium cum vi AL eodem modo, ac ſi primarius quieſceret, et actio ſolis tolleretur.

204. *Cor.* 3. Quoniam in caſu lunæ AB ſemper major eſt quàm AC, luna in conjunctione plus attrahitur verſus ſolem quàm verſus tellurem; non tamen ob hanc cauſam relinquit tellurem; nam velocitas ejus abſoluta multò major eſt quàm quæ ſufficit ut corpus deſcribat circulum, ſi agitetur a vi quæ eſt differentia inter vires AB, AC; luna igitur recedet a ſole donec perventum eſt ad oppoſitionem, et poſtea agitata ſummâ virium AB, AC, accedet verſus conjunctionem: et ſic orbita lunaris reſpectu ad ſolem, duas habet apſides in ſingulis revolutionibus ejus circa terram.

Sectio Sexta.

globi, et fic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiefcens, fi tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret motum fluxus et refluxus. Par eft ratio globi uniformiter progredientis in directum, et interea revolventis circa centrum fuum (per legum corol. v.) ut et globi de curfu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, et ab ipfius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorfum in quadraturis, facietque ipfam defcendere ufque ad fyzygias; et vis *KL* trahet eandem furfum in fyzygiis, fiftetque defcenfum ejus, et faciet ipfam afcendere ufque ad quadraturas: nifi quatenus motus fluendi et refluendi ab alveo aquæ dirigatur, et per frictionem aliquatenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, et minuatur globus, ceffabit motus fluendi et refluendi; fed ofcillatorius ille inclinationis motus et præceffio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrofque compleat iifdem temporibus, et fuperficie fua contingat ipfum interius, eique inhæreat; et participando motum ejus, compages utriufque ofcillabitur, et nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad fufcipiendas impreffiones omnes indifferens eft. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eft, ubi nodi funt in fyzygiis. Inde in progreffu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem fuam minuere, et ifto conatu motum imprimit globo toti. Retinet globus motum impreffum, ufque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac ratione maximus decrefcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, et minimus inclinationis angulus in octantibus poft quadraturas; dein maximus reclinationis motus in fyzygiis, et maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eft ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eft paulo quam juxta polos, vel conftat ex materia paulo denfiore. Supplet enim vicem annuli ifte materiæ in

æquatoris

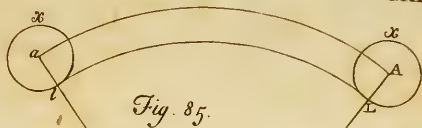


Fig. 85.

Fig. 86.

f
d
m
D
A
a n i
g u
c
N
C
B K L
H
r
F
e
E
M
Z
V
O
S

Semita
Semita
Primary
Satellus

æquatoris regionibus exceſſus (*). Et quanquam, aucta utcunque globi hujus vi centripeta, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus et præcedentis corollarii vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum et minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur et permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis *LM* trahit aquam deorſum maxime in quadraturis,

(*) 205. Hinc facile colligitur puncta æquinoctialia regredi ob actiones ſolis atque lunæ conjunctim. Ponamus enim planetam prope ſuperficiem telluris revolvi in orbita quæ ad orbitam, in quâ revolvitur tellus ipſa, inclinatur; tum, ſole vel lunâ in æquatore exiſtentibus, vis tota perturbatrix agit in plano æquatoris, nullamque mutationem inclinationis vel nodorum motum producet. In locis vero quæ nonaginta gradus a punctis æquinoctialibus diſtant, in tropicis ſcilicet, vis illa perturbatrix efficiet ut nodi regrediantur, motu vero minori ob diminutam planetæ diſtantiam. Idem eveniet ſi numerus planetarum ita augeatur, ut ſolidus ex his conflatus annulus terræ adhereat; velocitas vero regreſſionis minor erit ob quantitatem materiæ motum illum participantis; et regreſſionis motus adhuc minor erit, ſi tellus, altior quidem juxta æquatorem quam apud polos, formæ ſit ſpheroidicæ, ob diffuſam annuli materiam per ſuperficiem totam telluris. Quoniam igitur neque ſol neque luna in plano æquatoris moventur, patet, puncta æquinoctialia ob eorundem actiones regredi debere, et exinde annum tropicalem ſidereo eſſe minorem: ob cauſas vero ſupra memoratas, conſtabit nodorum motum fore lentiſſimum. Hicce vero motus, calculo prælongo inveſtigatus, motui ab aſtronomis deprehenſo (qui talis eſt ut puncta æquinoctialia totam revolutionem in annis 25000 peragerent) accurate reſpondet.

206. Majorem diametrum telluris per æquatorem tranſire, minorem vero per polos, colligi poteſt ex rotatione ejus diurnâ; ob vim enim centrifugam ex motu illo oriundam, niſi terra paulo altior eſſet ſub æquatorem quam apud polos, maria apud polos ſubſiderent, et juxta æquatorem aſcendendo ibi omnia inundarent.

207. Ex proportione vis centrifugæ ad vim gravitatis computum ineund invenit Newtonus, diametrum terræ apud æquatorem eſſe ad ipſius diametrum per polos, ut 230 ad 229: quod, comparatione diverſarum longitudinum pendulorum in diverſis latitudinibus minuta ſecunda oſcillantium inventum, obſervationibus aſtronomorum recentioribus mire convenire videmus.

208. Eodem argumento, ſi conſtitutio jovis eadem ſit ac noſtræ telluris, colligere licet, majorem adhuc inæqualitatem in diametris jovis inveniri debere, ob motum ejus diurnum ſpatio hor. 9. confectum; ita ut non mirum eſt, ſi ea ſit diametrorum jovis differentia quæ obſervationibus aſtronomicis comprobatur.

SECTIO SEXTA.

ris, et vis KL ſeu $NM-LM$ trahit eandem ſurſum maxime in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum et incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias, ac deſinunt trahere aquam ſurſum incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, et minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quatenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus vel per vim inſitam aquæ paulo diutius perſeveret, vel per impedimenta alvei paulo citius ſiſtatur. (y)

Corol. 21.

(y) 209. *Fluxum et refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.* Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet per corol. 19. et 20. prop. XXXVIII. ut et aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis et liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in maris *Atlantici* et *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* et promontorium *Bonæ Spei*, ut et in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* et *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit, niſi ubi motus, ab oceano profundo per loca vadoſa propagatus, uſque ad horam quintam, ſextam, ſeptimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam ſupra, et per horas diei lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis ſolis vel lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquamdiu, et per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit; id quod fiet ſpatio horæ unius duarumve, ſed ſæpius ad littora ſpatio horarum trium circiter, vel etiam plurium ſi mare ſit vadoſum.

Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernentur diſtincte, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppoſitione conjungentur eorum effectus, et componetur fluxus et refluxus maximus. In quadraturis ſol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; et ex effectuum differentia æſtus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teſte, major eſt effectus lunæ quam ſolis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra ſyzygias et quadraturas, æſtus maximus qui ſola vi lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam lunarem, et ſola ſolari in tertiam ſolarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius eſt; ideoque in tranſitu lunæ a ſyzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia ſolaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo in-

Corol. 21. Eadem ratione, qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur, et per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia. SECTIO SEXTA.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, et motus fit in antecedentia, matera juxtia æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem et perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque

intervallo paulo post octantes lunæ; et paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ a quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis a terra. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium (per cor. 14). Igitur sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis paulo majores sint, et in quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; et luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim ubi in apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque luminaris ex ipsius declinatione seu distantia ab æquatore. Nam si luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, sine actionis intensione et remissione, ideoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, et propterea minores ciebunt æstus in syzygiis solstitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem solstitialibus majores ciebunt æstus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum solis. Incidunt igitur æstus maximi in syzygias et minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in syzygiis comitatur semper minimus in quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam solis a terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi et minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quam sequantur, et sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Designet *ApEP* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* TAB. XII. FIG. 87.

Sectio Sexta.

cunque oblique in ſuperficiem ſuam facto propelli, et motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, quam in alium quemvis; perſpicuum eſt, quod is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam globus oblique, in eadem illa ſuperficiei parte, qua prius, impulſu quocunque novo; et cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum corol. 2.) compoſita impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem,

AE æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex altera parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas menſuratas a centro telluris: et *CK*, *Ck* altitudines minimas: et ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur ellipſis, deinde ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur ſphærois *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram maris quam proxime, et erunt *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* altitudines maris in locis, *F*, *f*, *D*, *d*. Quinetiam ſi in præfata ellipſeos revolutione punctum quodvis *N* deſcribat circulum *NM*, ſecantem parallelos *Ff*, *Dd* in locis quibuſvis *R*, *T*, et æquatorem *AE* in *S*; erit *CN* altitudo maris in locis omnibus *R*, *S*, *T*, ſitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujuſvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, hora tertia poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem; poſtea defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt occaſum lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia poſt appulſum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia poſt ortum lunæ; et affluxus poſterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Diſtinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemiſphæricos, unum in hemiſphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemiſphærio oppoſito *Khk*; quos igitur fluctum borealem et fluctum auſtralem nominare licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuo oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, et auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores et minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur et occidunt. Æſtus autem major, luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, et luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet

ſimplicem, circa axem inclinatione datum. Et par eſt ratio impulſus ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut et impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: generabunt hi eundem motum circularem ac ſi ſimul et ſemel in locum in-

det in tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientia compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperent veſpertinos et verſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* vero altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* et *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; et æſtus proxime poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proxime poſt quadraturas minuit. Unde ſit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* et *Briſtoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi a ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam et fluviorum oſtiis, ſint quarti vel etiam quinti a ſyzygiis.

Porro fieri poteſt ut æſtus propagetur ab oceano per freta diverſa ad eundem portum, et citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem, in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poſſit motus novos diverſorum generum. Fingamus æſtus duos æquales a diverſis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſabatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt, et ſic ſpatio diei illius efficient ut aqua tranquille ſtagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æſtus in oceano vicibus alternis majores et minores, uti dictum eſt; et inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores et bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major et minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, et inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem et ſemel ad minimam; et altitudo maxima, ſi luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium

interſectionis æquatorum motuum illorum, quos ſeorſim generarent, fuiſſent impreſſi. Globus igitur homogeneus et perfectus non retinet motus plures diſtinctos, ſed impreſſos omnes componit et ad unum reducit, et quatenus in ſe eſt, gyratur ſemper motu ſimplici et uniformi circa axem unicum, inclinatione ſemper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis,

omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batſham* ſub latitudine boreali 20^{gr}. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein luna ad boream declinante incipit fluere et refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; et æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; et luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ et affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ad oceano *Sinenſi* inter continentem et inſulam *Luconiam*, alter a mari *Indico* inter continentem et inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a mari *Indico* et ſpatio horarum ſex a mari *Sinenſi* per freta illa venientes, et ſic in horam tertiam et nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

210. Commodus hic nobis præbetur locus explicandi tranſitum a binis æſtubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares ſitis eveniunt, ad ſingulos æſtus, qui ſecundum Theoriam noſtram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim in zonis temperatis et torridâ quotidie duo fluxus obſervantur, in zonis frigidis autem unum tantum, tranſitio ſubitanea a binario ad unitatem maxime mirabilis ac paradoxa videri poſſet. Sed quia ſi fluxus bini ſucceſſivi inter ſe ſunt inæquales, refluxus aquæ ſeu maxima depreſſio fluxui minori eſt vicinior, bini æſtus quoque ſucceſſivi ratione temporis inter ſe erunt inæquales, ſi quidem voce æſtus intelligamus motum aquæ a ſumma elevatione ad imam depreſſionem uſque, ac viciſſim. Quo magis itaque ab æquatore verſus polos recedatur, eo major deprehendetur inter binos æſtus ſucceſſivos inæqualitas, cum ratione magnitudinis tum temporis, major enim diutius durabit quam minor, ambo vero ſimul ubique abſolventur tempore 12 horarum cum 24′ circiter: quod ſi itaque in eas regiones uſque perveniatur, in quibus luna utrâque vice vel ſuper horizonte vel ſub horizonte meridianum attingit, æſtus minor omnino evaneſcit, ſoluſque major ſupererit, qui tempus 12°, 24′ adimplebit. Ex quibus perſpicuum eſt, ſi luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æſtuum ſucceſſivorum ad polos accedendo continuo fieri majorem, atque tandem minorem omnino evaneſcere debere, quod cum evenit, bini æſtus in unum coaleſcunt.

axis, aut rotationis velocitatem mutare poteſt. Si globus plano quocunque, per centrum ſuum et centrum in quod vis dirigitur tranſeunte, dividi intelligatur in duo hemiſphæria; urgebit ſemper vis illa utrumque hemiſphærium æqualiter, et propterea globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum et æquatorem materia nova in formam montis cumulata, et hæc, perpetuo conatu recedendi a centro ſui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipſius ſuperficiem, et circulos circum ſe punctumque ſibi oppoſitum perpetuo deſcribant. Neque corrigetur iſta vagationis enormitas, niſi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in caſu (per corol. xxi.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per corol. xx.) nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, et hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons et hæcce nova materia ſunt vel polo vel æquatori propriores. Sectio Sexta.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXVIII.

Poſitis iiſdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, deſcribit areas temporibus magis proportionales et orbem ad formam ellipſeos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum et maximum* T, *radiis ad ipſum ductis, deſcribere poteſt.* Tab. XII. Fig. 88.

Nam corporis *S* attractiones verſus *T* et *P* componunt ipſius attractionem abſolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* et *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato diſtantiæ *SO* magis eſt proportionalis reciproce, quam quadrato diſtantiæ *ST*: ut rem perpendenti facile conſtabit.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XXIX.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P *et* T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum et maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*

Demonstratur eodem fere modo cum prop. xxxviii. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, et quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, et commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. Liquet hoc per corollarium secundum propositionis xxxii. collatum cum demonstratis in prop. xxxvi et xxxvii. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, et augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum et maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, et magis deinceps magisque agitatur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellip-

ellipticas, et arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe et quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentque, et orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ in centro gravitatis corporis maximi et intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; et sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat et statuatur communis umbilicus orbitarum omnium. SECTIO SEXTA.

Descripsimus jam systema solis, terræ, lunæ, et planetarum: superest ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA XIII.

Cometas esse luna superiores et in regione planetarum versari.

Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas supra regiones sublunares, sic ex parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis aut solito tardiores aut retrogradi, si terra est inter ipsos et solem; at justo celeriores si terra vergit ad oppositionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si terra versatur inter ipsos et solem; et justo tardiores vel retrogradi, si terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, et motu angulari circa solem tanto celerius fertur, ut recta per terram et cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa e terra spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse re-

tro-

Sectio Sexta.

trogradus; ſin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit ſaltem tardior. At ſi terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado diſtantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ *♌A*, ♈ *♌B*, ♈ *♌C* obſervatæ tres longitudines cometæ ſub initio motus, ſitque ♈ *♌F* longitudo ultimo obſervata, ubi cometa videri deſinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *♌A* et *♌B*, *♌B* et *♌C* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam et ultimam ad tempus inter obſervationem primam et ſecundam, et jungatur *♌G*. Et ſi cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta uniformi cum motu progrederetur; foret angulus ♈ *♌G* longitudo cometæ tempore obſervationis ultimæ. Angulus igitur *F♌G*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, ſi terra et cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈ *♌G*, et ſic motum apparentem cometæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terra, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu terræ, et idcirco pro parallaxi cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *acT* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione prima, *c* locum terræ in obſervatione tertia, *T* locum terræ in obſervatione ultima, et *T*♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*♌F*, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in *T*. Jungatur *ac*, et producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, et erit *g* locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, et capiatur augulus ♈*gV* angulo ♈*♌G* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini co-

Tab. XII. Fig. 89.

Tab. XII. Fig. 89, 90.

cometæ e loco *g* ſpectati; et angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur a tranſlatione terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet.

Idem colligitur ex curvatura viæ cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine curſus, ubi motus apparentis pars illa, quæ a parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, et quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; et inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra jovem. Unde conſequens eſt quod in perigæis et periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes martis et inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis a ſole illuſtrati et in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicata ratione diſtantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam a ſole, et in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur et lucis quantitas et apparens diameter cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe et ratione ſubduplicata lucis ad lucem inverſe. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum ſexdecim pedum a *Flamſtedio* obſervata et micrometro menſurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem ſeu ſtella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″; Luce vero et claritate capitis ſuperabat caput cometæ anni 1680, ſtellaſque primæ vel ſecundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus ſaturnum cum annulo ſuo quaſi quadruplo lucidiorem fuiſſe: et quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, et diameter apparens globi ſit quaſi 21″, ideoque lux globi et annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter eſſet 30″: erit

SECTIO SEXTA.

erit diſtantia cometæ ad diſtantiam ſaturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverſe, et 12″ ad 30″ directe, id eſt, ut 24 ad 30 ſeu 4 ad 5. Rurſus cometa anni 1665 menſe aprili, ut auctor eſt *Hevelius*, claritate ſua pene fixas omnes ſuperabat, quinetiam ipſum ſaturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, et cum ſtellis primæ magnitudinis conferabatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat jove, et nunc minor corpore intermedio ſaturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei, ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet ſtellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce ſaturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt, quod cometæ omnes in periheliis vel infra ſaturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent a ſole noſtro, quam planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur a tellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem cometarum per fumum illum maxime copioſum et craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto proprius ad ſolem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis a ſe reflexæ planetas æmuletur. Inde veriſimile fit cometas longe infra ſphæram ſaturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia cometarum, ne fumus a capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate et expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari et intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille

jam

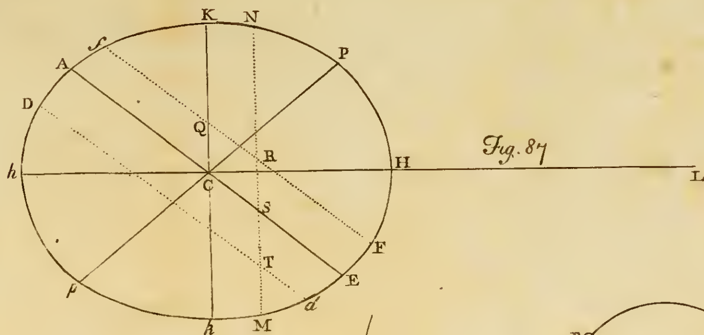


Fig. 87

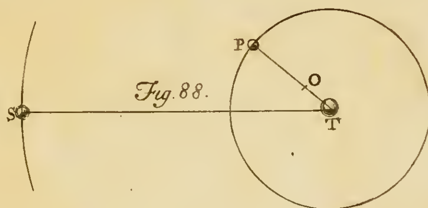


Fig. 88.

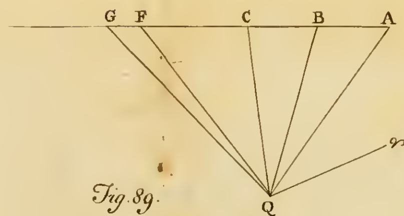


Fig. 89.

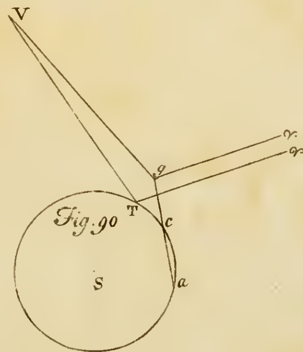


Fig. 90

jam certe, quoties caudam maximam et fulgentiſſimam emittit, jovem ipſum ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur a ſole, ideoque erit ſoli multo propior. Quinetiam capita ſub ſole deliteſcentia, et caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu cometarum a terra ſolem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu a ſole verſus terram. Sic enim cometa poſterior anni 1665 (obſervante *Hevelio*) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo apparente, ideoque prætererat perigæum; ſplendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum cometa radiis ſolaribus obtectus deſiit apparere. Cometa anni 1683 (obſervante eodem *Hevelio*) in fine menſis julii, ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad *Sept*. 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug*. 6. eſſe tantum 6′. 5″ incluſa coma, at *Sept*. 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia ſolis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius a ſole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad terram. Cometa anni 1618 circa medium menſis *Decembris*, et iſte anni 1680 circa finem ejuſdem menſis, celerrime movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contigit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis ſolaribus; et ſplendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate ſolis. Caput cometæ prioris, juxta obſervationes *Cyſati*, *Decemb*. 1. majus videbatur ſtellis primæ

 magni-

Sectio Sexta.

magnitudinis, et *Decemb.* 16. (jam in perigæo exiſtens) magnitudine parum, ſplendore ſeu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit obſervandi. Die 12 menſis *Decemb.* conſpectum et a *Flamſtedio* obſervatum eſt caput cometæ poſterioris in diſtantia novem graduum a ſole; id quod ſtellæ tertiæ magnitudinis vix conceſſum fuiſſet. *Decemb.* 15 et 17 apparuit idem ut ſtella tertiæ magnitudinis, diminutum utique ſplendore nubium juxta ſolem occidentem. *Decemb.* 26. velociſſime motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia a perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales a terra diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maxime ſplenduere, ex altera perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis et cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, et maxima apparere ubi capita velociſſime moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quatenus ea major eſt in vicinia ſolis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ luce ſolis a ſe reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantopere frequentant regionem ſolis. Si cernerentur in regionibus longe ultra ſaturnum, deberent ſæpius apparere in partibus ſoli oppoſitis. Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; et ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur a ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propriores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longe major ſita

eſt

eſt a latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illa majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

Corol. 3. Hinc etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas et nonnunquam curſui planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrime, et motus ſuos, etiam contra curſum planetarum diutiſſime conſervant. Fallor ni genus planetarum ſint, et motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod ſcriptores aliqui meteora eſſe volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita cometarum atmoſphæris ingentibus cinguntur; et atmoſphæræ inferne denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic terra ſi e planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, et corpus firmum ſub nubibus prope deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, et firmum jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum ſub atmoſphæris et profundioribus et craſſioribus abſcondi debent.

PROPOSITIO. XLI. THEOREMA. XXX.

Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, et radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.

Patet per corol. 1. prop. xv. collatum cum notâ (157).

Corol. 1. Hinc ſi cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipſes, et tempora periodica erunt ad tempora periodica planetarum in axium principalium ratione ſeſquiplicata. Ideoque cometæ maxima ex parte ſupra planetas verſantes, et eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis ſaturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2.

SECTIO SEXTA.

Corol. 2. Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. xviii) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicata ratione duplæ diſtantiæ planetæ a centro ſolis, ad diſtantiam cometæ a centro ſolis quamproxime. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in qua terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: et terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, et motu horario partes 71675$\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eadem telluris a ſole diſtantia mediocri, ea cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\surd 2$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, et motu horario partes 101364$\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus diſtantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum et horarium in ſubduplicata ratione diſtantiarum reciproce, ideoque datur.

Corol. 4. Unde ſi latus rectum parabolæ quadruplo majus ſit radio orbis magni, et quadratum radii illius ponatur eſſe partium 100000000: area quam cometa radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcribit, erit partium 1216373$\frac{1}{2}$, et ſingulis horis area illa erit partium 50682$\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus ſit vel minus in ratione quavis, erit area diurna et horaria major vel minor in eadem ratione ſubduplicata.

F I N I S.


BOSTON COLLEGE
3 9031 01528486 2

